

Е. М. ГЕРШЕНЗОН
Н. Н. МАЛОВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МЕХАНИКА



Е. М. Гершензон
Н. Н. Малов

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МЕХАНИКА

Допущено Министерством просве-
щения СССР в качестве учебного
пособия для студентов физико-
математических факультетов пе-
дагогических институтов

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

22.2
Г 42

Рецензенты: кафедра общей и экспериментальной физики Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена; Пеннер Д. И., профессор, зав. кафедрой теоретической физики Владимирского педагогического института.

ИБ № 1711

Гершензон Евгений Михайлович
Малов Николай Николаевич

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
МЕХАНИКА

Редактор В. А. Обмелина. Художник В. Ф. Соболев.
Художественный редактор В. М. Прокофьев.
Технические редакторы С. Н. Филатова, Е. Н. Зелянина.
Корректор Л. П. Михеева.

Сдано в набор 05.07.78. Подписано к печати 10.11.78. 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 3, Гари. лнтер. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,0+0,25 форз. Уч.-изд. л. 14,36+0,34 форз. Тираж 52 000 экз. Заказ № 1872. Цена 90 коп.
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.

Гершензон Е. М., Малов Н. Н.

Г 42 Курс общей физики: Механика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1979. — 240 с., ил.

В книге изложены вопросы кинематики и динамики материальной точки и твердого тела, движения в неинерциальных системах отсчета, элементы специальной теории относительности, колебания и волны, элементы акустики, гидроаэродинамика, всемирное тяготение.

Особое внимание уделено объяснению физического смысла изучаемых явлений.

Г $\frac{60602-229}{103(03)-79}$ 39-79

22.2

53

© Издательство «Просвещение», 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Курс общей физики» предназначен для будущего учителя. Поэтому в нем есть особенности, отличающие его от учебников для университетов и технических вузов. Авторы видели свою задачу в достаточно кратком изложении принципиальных вопросов экспериментальной физики, органическом введении в текст данных современной физики. Книга по возможности построена так, чтобы полученные при ее изучении знания можно было непосредственно использовать в процессе преподавания физики в средней школе. В рамках общей (экспериментальной) физики читатель знакомится с основными физическими явлениями и теориями, их объясняющими, и приобретает навыки владения ими при решении физических задач, без чего теория не может быть усвоена.

«Курс общей физики» написан в соответствии с новой программой по общей физике для педагогических институтов на основании многолетнего опыта чтения лекций на кафедре общей и экспериментальной физики Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина. В нем предпринята обсуждаемая в программе попытка нетрадиционного, но — по ряду причин — более рационального порядка изложения материала. Вместо обычной последовательности разделов — «Механика», «Молекулярная физика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и атомная физика» — принято построение: «Механика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и атомная физика», «Молекулярная физика». Настоящее пособие посвящено первому разделу физики — «Механике».

Авторы выражают глубокую признательность всем, кто способствовал появлению этой книги, особенно профессору В. С. Эткину, идеи которого по построению «Курса» внесли значительный вклад в создание книги.

ВВЕДЕНИЕ

Обычно физику определяют как науку, изучающую наиболее общие свойства окружающей нас неживой природы. Это определение не очень точно: химия, астрономия и другие отрасли знания также изучают неживую природу. Однако в данном случае некоторая неопределенность, обусловленная отсутствием точных границ между физикой и другими отраслями знания, не вредит делу, и попытки дать более точное определение не представляют интереса.

Гораздо важнее отметить, что физика является экспериментальной точной наукой. Она идет от простого наблюдения явлений к постановке целенаправленных опытов, позволяющих получить качественное представление о процессах, происходящих в природе. Далее, по мере уточнения методов исследования открывается возможность количественных измерений тех или иных физических величин и формулировки количественных физических законов. Для этой цели привлекаются математические методы, благодаря которым результаты обобщаются в сжатой ясной форме. Физические законы позволяют предсказывать ход событий в определенных условиях. Проверка этих предсказаний дает возможность установить область применения того или иного закона и оценить точность предсказаний, а также точность производимых в физике измерений. Именно в этом смысле физику называют точной наукой: она не обладает абсолютно точными сведениями о природе, но может оценивать точность и надежность своих предсказаний.

Если на первых этапах развития физики в ней возникали представления, далекие от действительности и впоследствии совсем оставленные, то в наше время физика настолько развилась, что, как правило, появление новых сведений и создание новых теорий не влечет за собой полного крушения старых представлений: они входят в новую теорию как предельный случай. Так, механика Ньютона представляет предельный случай механики Эйнштейна и полностью сохраняет свое значение в области движений, происходящих с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Вся история развития физики убеждает в реальности окружающего мира, существующего вне нас и независимо от нашего сознания. В этом мире явления связаны друг с другом той или иной

причинной связью. Человек способен с известной точностью познавать эти связи и пользоваться ими в практической жизни: на базе физики и ее закономерностей вырастают различные области техники. В то же время наши знания являются неполными и относительными. Неполнота их обусловлена неисчерпаемостью природы: чем глубже проникаем мы в ее тайны, тем больше новых загадок открывается перед нами. Относительность наших знаний проявляется в необходимости уточнять и совершенствовать наши представления и теории по мере открытия новых фактов. В то же время наши знания и абсолютны: новые теории, как уже говорилось выше, не уничтожают старые, а лишь определяют границы их применимости.

Опыт является в физике верховным судьей: если обнаруживается несоответствие физического закона новым опытным фактам, закон заменяется более точным и устанавливаются границы применения старого закона, в которых он оказывается соответствующим природе.

Сведения, получаемые точными науками о природе, проверяются практикой, используются в технике. Если развитие физики помогает развитию техники, то и техника, в свою очередь, обогащает физику новыми, более совершенными приборами и методами исследования природы и ставит перед физикой новые задачи.

Наконец, физика тесно связана с философией. Данные физики способствовали развитию философских представлений диалектического материализма; новые достижения физики подтвердили верность всех основных положений диалектического материализма. Философия, в свою очередь, позволяет физикам надежно ориентироваться в мире новых физических фактов и идей.

Физика, развивавшаяся со времен Галилея (ее обычно называют классической физикой), имела дело по преимуществу с макроскопическими явлениями. В ее теоретических построениях господствовала идея: все в мире можно свести к механике. Поэтому ученые широко пользовались механическими моделями изучаемых ими явлений. Так, крупнейший физик XIX в. Кельвин говорил, что он не понимает явления, пока не создаст механическую модель его.

Но уже развитие электродинамики в третьей четверти XIX в. показало, что она не может быть сведена к механике. А в физике микромира исследователи столкнулись с качественно новыми явлениями, не допускающими наглядного толкования. От механических (и вообще наглядных) моделей пришлось отказаться. Академик Л. Д. Ландау так охарактеризовал современную физику: «Физик способен понять то, чего он не может себе представить».

1.1. СИСТЕМА ОТСЧЕТА. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТЕЛА

Окружающий нас мир материален. Это означает, что он существует вне нашего сознания и независимо от него. Образующая мир материя, действуя на наши органы чувств, вызывает у нас определенные ощущения. Критически анализируя эти ощущения, мы можем познавать закономерности, управляющие происходящими в мире изменениями. Философы называют эти изменения движением. Но физики употребляют термин «движение» в более узком смысле: движение — это перемещение или изменение положения в пространстве. Так как все явления происходят в пространстве и во времени, то движение (в физическом смысле) присутствует во всяком изменении. Поэтому вполне естественно, что изучение физики начинается с исследования свойств и законов механического перемещения.

Кинематика изучает изменение положения материальных тел (иногда их можно уподобить точкам) в пространстве с течением времени. Понятия пространства и времени (в философии они рассматриваются как формы существования материи) являются первичными и в физике определены быть не могут; физика может только установить свойства, присущие пространству и времени.

Основываясь на результатах повседневного опыта, физика (классическая) считает свойства пространства и времени не зависящими от присутствия материи. Пространство трехмерно, однородно, непрерывно и изотропно. Однородность означает, что в любом месте пространства физическое явление в данных условиях протекает одинаково. Изотропность означает, что если бы система взаимодействующих тел повернулась на некоторый угол, то это не отразилось бы на ходе физических процессов. Время классическая физика также считает однородным, непрерывным и не зависящим от присутствия материальных тел.

В рамках классической физики эти представления полностью оправдываются. Отклонения от них наблюдаются при скоростях движения, приближающихся к скорости света, вблизи очень массивных тел (например, Солнца) и, по-видимому, в мире атомных ядер.

Описание любого движения имеет смысл только по отношению к какому-либо телу (называемому телом отсчета), выбор которого

совершенно произволен; но удачно выбранное тело отсчета позволяет выявить физические причины, вызывающие данное движение. С телом отсчета связывается та или иная система координат и часы, т. е. устройство, позволяющее определять промежутки времени между происходящими событиями. Система координат и часы образуют систему отсчета.

Роль удачного выбора тела отсчета можно пояснить следующим историческим примером: древнегреческий астроном К. Птолемей считал Землю центром Вселенной и рассматривал движения небесных тел, в частности планет, относительно Земли.

Траектории движения некоторых планет оказались очень сложными (см. рис. 1.1, где показана траектория движения Марса по небесному своду, наблюдаемого с Земли); причины этого были непонятны.

Гениальный польский астроном Н. Коперник (1473—1543) за тело отсчета принял Солнце. При этом орбиты планет получились близкими к круговым. Позже И. Кеплер (1571—1630) нашел, что истинная форма планетных орбит более сложна, — это эллипсы с малым эксцентриситетом. И. Ньютону (1643—1727) удалось показать, что форма планетных орбит непосредственно определяется законом всемирного тяготения.

С телом отсчета можно связать любую систему координат; чаще всего используют прямоугольную (декартову) систему.

Мгновенное положение M_1 точки M в прямоугольной системе координат $XOYZ$ однозначно определяется (в момент t_1) заданием

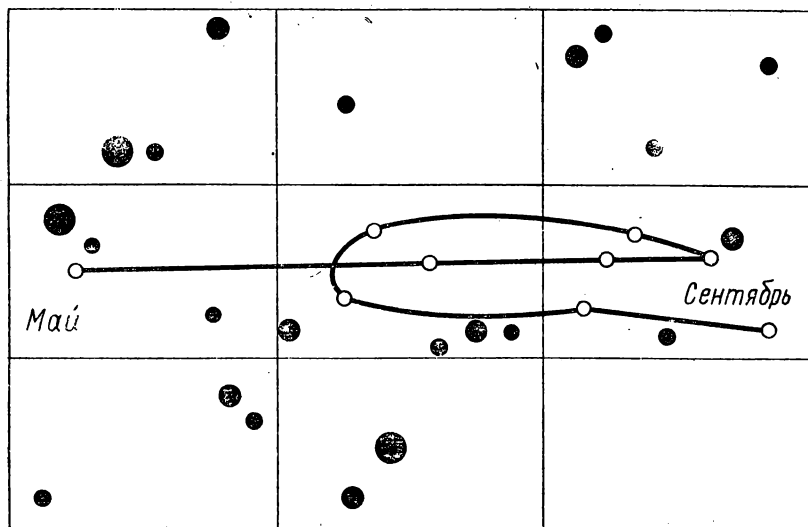


Рис. 1.1

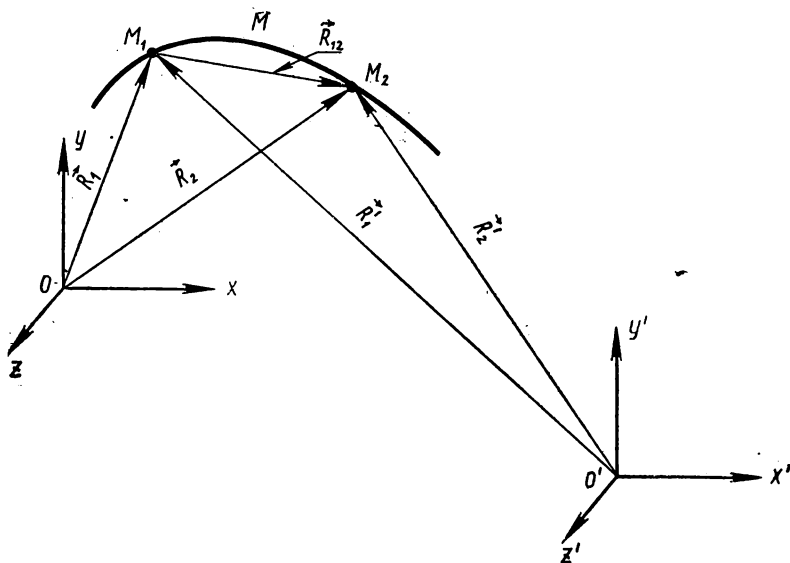


Рис. 1,2

ее радиус-вектора \vec{R}_1 (рис. 1.2):

$$\vec{R}_1 = \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1,$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — единичные векторы, определяющие положительные направления координатных осей, а x_1 , y_1 , z_1 — проекции радиус-вектора \vec{R}_1 на оси координат.

В системе координат $X'O'Y'Z'$, неподвижной относительно системы $XOYZ$, положение той же точки в тот же момент (время не изменяется при переходе из одной системы координат в другую) будет определяться вектором:

$$\vec{R}'_1 = \vec{i}'x'_1 + \vec{j}'y'_1 + \vec{k}'z'_1,$$

отличным от вектора \vec{R}_1 .

В момент $t_2 > t_1$ точка M окажется в положении M_2 , характеризуемом соответственно радиус-векторами \vec{R}_2 и \vec{R}'_2 . При этом координаты рассматриваемой точки изменяются, но сохраняется квадрат расстояния между двумя положениями (M_1 и M_2) точки M , равный:

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ &= (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 = R_{12}'^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где индексы «2» относятся к точке M_2 .

Линию, описываемую движущейся точкой, называют *траекторией* движения. Отрезок, соединяющий одно из положений

точки (M_1) с любым из последующих ее положений (M_2) и направленный от начального положения к конечному, называют *вектором конечного перемещения* точки (или просто перемещением) \vec{R}_{12} , причем (см. рис. 1.2) -

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}'_2 - \vec{R}'_1.$$

Ему соответствует промежуток времени $t_2 - t_1$. Вектор конечного перемещения, вообще говоря, не совпадает с участком траектории, пройденным точкой. Но можно рассматривать элементарные перемещения $d\vec{R}$, проходимые точкой за элементарные промежутки времени dt . Направление каждого такого вектора совпадает с направлением касательной к траектории в данной точке, проведенной в направлении движения. Эти участки являются элементарными перемещениями движущейся точки. Их геометрическая сумма и представляет конечное перемещение:

$$\vec{R}_{12} = \int_1^2 d\vec{R}. \quad (1.2)$$

Это важнейшее свойство перемещений (их векторное сложение называется свойством или принципом наложения) определено свойствами пространства.

На практике часто нужно знать расстояние, пройденное точкой по траектории, — длину пути s_{12} . Эта скалярная величина определяется арифметической суммой модулей элементарных перемещений:

$$s_{12} = \int_1^2 |d\vec{R}|. \quad (1.3)$$

Таким образом, перемещение \vec{R}_{12} — вектор, а длина участка траектории (путь) s_{12} — скаляр. Важно твердо усвоить, что модуль конечного перемещения \vec{R}_{12} между двумя точками и длина соответствующего пути в общем случае отличны друг от друга. Их значения одинаковы только в случае прямолинейного движения, происходящего в одном направлении. Например, модуль перемещения Земли вокруг Солнца (принятого за начало координат) составляет за полгода $|\vec{R}'_{12}| = 300 \cdot 10^6$ км, за год $|\vec{R}''_{12}| = 0$, а пройденный путь соответственно равен $s'_{12} = 470 \cdot 10^6$ км и $s''_{12} = 940 \cdot 10^6$ км (орбиту Земли считаем круговой).

При рассмотрении некоторых явлений приходится пользоваться системой координат $X'O'Y'Z'$, движущейся относительно системы $XOYZ$. Пусть в нештрихованной системе в момент t_1 радиус-вектор начала координат штрихованной системы был равен \vec{R}_3 , а в момент t_2 — \vec{R}_4 . Точка M за это время переместилась в системе $XOYZ$ на \vec{R}_{12} . Тогда ее перемещение в штрихованной системе,

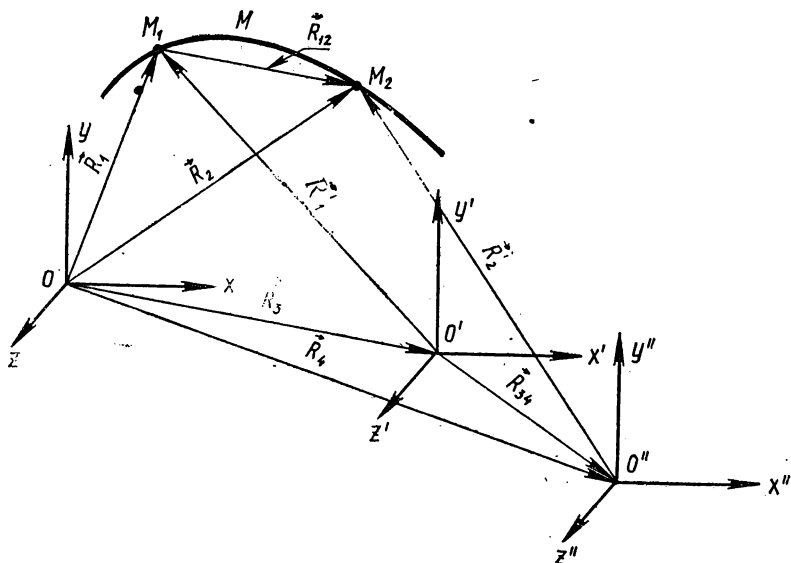


Рис. 1.3

как это следует из четырехугольника $M_1M_2O''O'M_1$ (рис. 1.3), равно:

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}_{12} - \vec{R}_{34}, \quad (1.4)$$

где

$$\vec{R}_{34} = \vec{R}_4 - \vec{R}_3.$$

Таким образом, мы видим, что при переходе от одной системы координат к другой (движущейся относительно первой), перемещения по-прежнему складываются векторно.

Важно отметить, что при этом рассмотрении мы использовали (кроме правил аналитической геометрии, отражающих свойства пространства) еще и предположение, что промежутки времени оцениваются в обеих системах одинаково. Это дополнительное физическое предположение, связанное с классическим представлением о независимости течения времени от движения, справедливо, как мы увидим позже (глава 6), лишь при скоростях, малых по сравнению со скоростью света в вакууме.

Траектория всякого движения в разных системах отсчета выглядит различно. Так, если вблизи диска, насаженного на горизонтальную ось (система I), расположить линейку, параллельную плоскости диска (система II), и перемещать по диску вдоль линейки кусок мела (система III), то при одновременном движении мела и вращении диска траектория, записанная мелом на диске, окажется криволинейной; относительно линейки мел при этом перемещается прямолинейно, а относительно руки, держащей мел, вообще неподвижен.

1.2. СКОРОСТЬ

Всякое перемещение происходит в пространстве и требует некоторого времени. Поэтому для характеристики движения точки целесообразно ввести понятие скорости движения.

Физическую величину, определяемую отношением перемещения $\Delta \vec{R}$ ко времени его прохождения, называют *средней скоростью*:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}.$$

Конечное перемещение, как мы видели выше, неполно отражает особенности движения. Поэтому и средняя скорость обладает тем же недостатком. Более содержательно понятие мгновенной скорости (скорости в данной точке или в данный момент).

Мгновенной скоростью называют физическую величину, измеряемую пределом средней скорости, получающимся при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \\ &= \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории (в рассматриваемой точке), как и вектор $d\vec{R}$. Это легко показать на опыте: раскаленные частицы точильного камня, срывающиеся с него при заточке инструмента, движутся именно по касательной.

При прямолинейном движении вектор скорости направлен вдоль прямолинейной траектории.

Скорость, являющаяся производной перемещения по времени, измеряется в метрах в секунду.

Иногда (в практических приложениях) рассматривают скалярную среднюю скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t},$$

равную отношению пройденного пути ко времени его прохождения. Так, средняя скалярная скорость обращения Земли вокруг Солнца равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 30 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Обычно скорости в окружающем нас макром мире не превышают сотен метров в секунду. Космические ракеты движутся со скоростями порядка 10 км/с. Микрочастицы, имеющие электрический заряд, могут двигаться с громадными скоростями, приближающимися иногда к скорости света в вакууме, равной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Эта скорость является предельной для частиц вещества. Позже

мы увидим, что она предельна и в случае передачи сигналов и распространения взаимодействий.

Из уравнений (1.4) и (1.5) следует, что, подобно перемещениям, скорости складываются векторно, т. е. подчиняются принципу наложения:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (1.6)$$

Подчеркнем еще раз, что при этом время считается текущим одинаково во всех системах координат, а расстояние между двумя точками (1.1) сохраняет свое значение при переходе из одной системы координат в другую. Соотношения (1.4) и (1.6) были впервые четко сформулированы и проанализированы Г. Г а л и л е е м (1564—1642).

1.3. УСКОРЕНИЕ

При равномерном прямолинейном движении ($v = \text{const}$) перемещения в любые равные промежутки времени одинаковы.

В реальных условиях тела редко движутся с постоянной скоростью. Поэтому для полного описания движений необходимо уметь оценивать изменения скорости. Но скорость меняется и в пространстве (от точки к точке) и во времени (от момента к моменту). Далеко не очевидно, какое из этих изменений важнее. Гениальный основатель механики Галилей выбрал изменение скорости во времени (называемое ускорением); дальнейшее развитие науки показало правильность выбора Галилея.

Мгновенное ускорение есть физическая величина, измеряемая отношением элементарного приращения скорости к промежутку времени, за который оно произошло:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z}{dt} = \\ &= \vec{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Таким образом, ускорение измеряется производной от скорости или второй производной от перемещения по времени.

Ускорение характеризует быстроту изменения скорости. Направление вектора \vec{a} совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$, определяющего изменение скорости за элементарный промежуток времени dt , и поэтому, вообще говоря, может не соответствовать направлению вектора \vec{v} (а следовательно, и $d\vec{R}$). Только при движении по прямой эти векторы сонаправлены в случае ускоренного движения или противоположны при наличии замедления.

Как видно из определения ускорения, оно в СИ измеряется в метрах в секунду за секунду. Специальных наименований единица ускорения, как и единица скорости, не имеет.

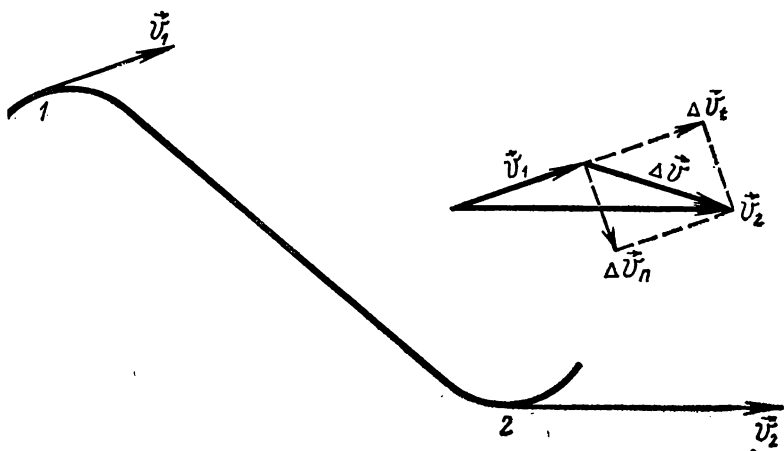


Рис. 1.4

В общем случае скорость может изменяться и по модулю, и по направлению. Чтобы установить эти изменения, рассмотрим два близких положения движущейся точки (рис. 1.4). Изменение ее скорости найдем, построив треугольник скоростей. Это изменение:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (1.8)$$

можно представить как сумму двух изменений скорости: по касательной $\Delta \vec{v}_t$ и по нормали $\Delta \vec{v}_n$ к участку траектории в точке 1. Деля $\Delta \vec{v}$ на затраченный на перемещение промежуток времени Δt и переходя к пределу (при $\Delta t \rightarrow 0$), получим ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_t}{dt} + \frac{dv_n}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n; \quad (1.9)$$

модуль ускорения равен:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2}.$$

Здесь вектор \vec{a}_t направлен по касательной к траектории в точке 1 и определяет изменение модуля скорости. Вектор \vec{a}_n направлен по нормали к траектории (к центру кривизны) и определяет изменение направления вектора скорости. Эти ускорения соответственно называются касательным (тангенциальным) и нормальным.

При рассмотрении ускорения часто бывает полезным метод годографа. *Годографом* называется геометрическое место концов векторов, характеризующих некоторую физическую величину; эти векторы откладываются от некоторой произвольной точки.

В соответствии с этим определением годографом радиус-векторов, определяющих мгновенные положения точки, является ее траектория.

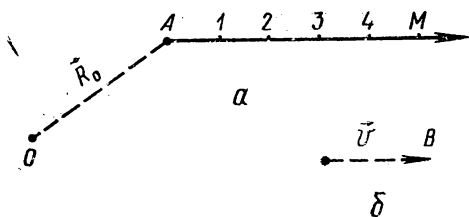


Рис. 1.5

На рис. 1.5, *а* показана траектория равномерного прямолинейного движения, начавшегося (в момент $t=0$) в точке *A*, последующие положения движущейся точки *M* перенумерованы. Годографом скорости в этом случае служит единственная точка (например, *B*; рис. 1.5, *б*).

Годографом скорости равноускоренного движения точки (без начальной скорости), начавшегося из начала координат (рис. 1.6, *а*, слева), является прямая, пробегаемая концом вектора скорости с постоянной скоростью (рис. 1.6, *а*, справа).

На рисунке 1.6, *б* слева показана траектория точки, совершающей равноускоренное движение, возникшее в точке *A* с горизонтальной начальной скоростью \vec{v}_0 и постоянным ускорением \vec{a} , направленным вертикально вниз. Годограф скорости этого движения дан на рисунке 1.6, *б* справа.

Разумеется, можно построить и годограф ускорений. Для равномерного движения (рис. 1.5) он не существует (нет ускорения). Для равноускоренных движений (рис. 1.6) он представляет единственную точку.

Отметим одну особенность рассмотренных движений. Если они могут происходить неограниченно долго, то точка может удалиться от начального положения сколь угодно далеко. Такие движения называют неограниченными (инфинитными).

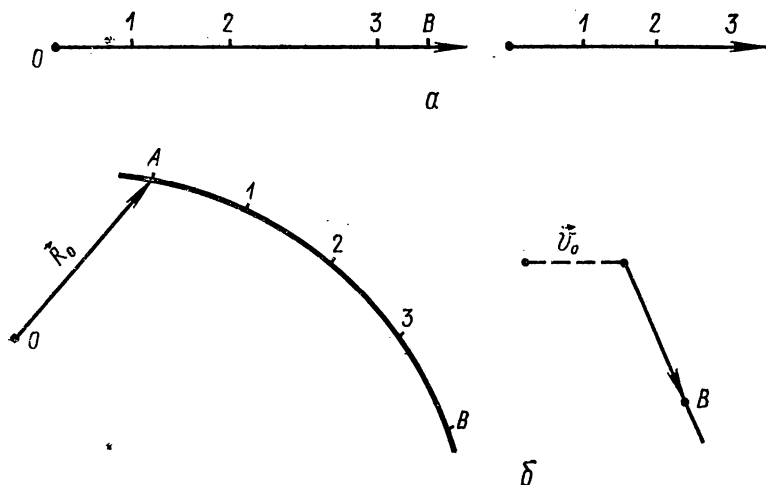


Рис. 1.6

Равноускоренное движение без начальной скорости (или при совпадении направления начальной скорости с направлением ускорения) также есть движение неограниченное.

Но если начальная скорость антинаправлена ускорению, то это движение будет ограниченным (финитным) в направлении начальной скорости, так как наибольшее смещение в этом направлении равно:

$$s_m = \frac{v_0^2}{2a}.$$

В противоположном же направлении движение оказывается неограниченным.

1.4. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Опишем с помощью понятий, введенных в предыдущем параграфе, одно из простейших ограниченных движений — равномерное обращение точки по окружности. Выберем систему координат, начало которой совпадает с центром окружности. Тогда за любые равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки поворачивается на равные углы (рис. 1.7, а).

Пусть радиус окружности — R , время одного оборота (период) — T . При отсутствии касательного ускорения модуль линейной скорости постоянен:

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \quad (1.10)$$

Но направление скорости непрерывно изменяется, так что существует нормальное ускорение. Для его нахождения построим график скорости (рис. 1.7, б). Это окружность радиусом v , обегаямая

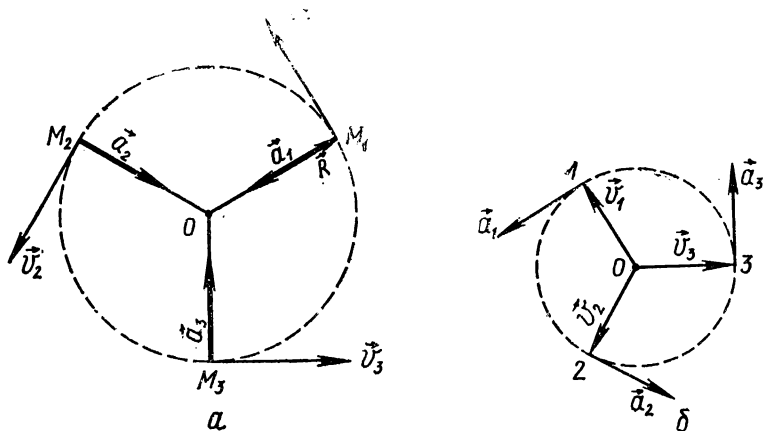


Рис. 1.7

изображающей точкой за время T . Поэтому скорость изображающей точки, равная реальному ускорению движущейся точки M , есть:

$$a = \frac{2\pi v}{T} = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{v^2}{R}. \quad (1.11)$$

Таким образом, линейная скорость \vec{v} направлена по касательной к окружности в каждой точке по движению; ускорение $\vec{a} = \vec{a}_n$ ей перпендикулярно и направлено к центру кривизны.

Вращательное движение материального тела тесно связано с обращением его точек вокруг соответствующих центров (или осей). Для его описания удобно ввести угловое смещение φ , равное углу поворота радиус-вектора движущейся точки относительно начального положения.

Угловая скорость определяется как скорость изменения углового смещения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.12)$$

Ее можно условно рассматривать как вектор $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, нормальный к плоскости вращения и ориентированный по правилу буравчика: если совместить ось буравчика с осью вращения и поворачивать его ручку в сторону движения обращающейся точки, то направление поступательного перемещения буравчика определит направление вектора угловой скорости. Точка приложения этого вектора произвольна; ею может быть, например, любая точка плоскости, содержащей траекторию движения. Удобно, хотя совершенно необязательно, совместить этот вектор с осью вращения.

Однако следует иметь в виду, что из-за криволинейности траектории движения векторный характер можно приписать только элементарным угловым перемещениям $d\vec{\varphi}$ (конечные угловые перемещения векторными свойствами не обладают).

Удобство угловых характеристик особенно выявляется при изучении вращения твердых (недеформируемых) тел — для всех точек твердого тела угловые смещения и угловые скорости оказываются одинаковыми (движение твердых тел рассмотрено в гл. 4).

Вектор угловой скорости стрелок наручных часов направлен в руку. Угловая скорость секундной стрелки равна:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} = 0,105 \text{ с}^{-1},$$

а часовой — в 720 раз меньше:

$$\omega_q = 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Эти скорости превосходят угловую скорость вращения Земли вокруг оси:

$$\omega_3 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} = \frac{\omega_q}{2}$$

и угловую скорость обращения Земли вокруг Солнца:

$$\omega_c = 2 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}.$$

Угловые скорости вращающихся частей различных механизмов достигают значений порядка тысяч секунд в минус первой степени.

Угловую скорость часто называют угловой частотой. Наряду с ней применяется также величина, обратная периоду,—

$$f = \frac{1}{T},$$

которую называют просто частотой и измеряют в герцах ($1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$).

Так как радиус-вектор обращающейся точки есть \vec{R} , то между угловой и линейной скоростью существует следующая связь:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{R}]. \quad (1.13)$$

Поэтому нормальное (центростремительное) ускорение можно представить в виде:

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}.$$

При неравномерном движении по окружности существуют как касательное, так и нормальное ускорения. При этом удобно ввести понятие *углового ускорения*

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

связанного с касательным ускорением соотношением:

$$\vec{a}_t = [\vec{\alpha} \vec{R}]. \quad (1.14)$$

Угловое ускорение — вектор, сонаправленный с вектором угловой скорости (если ω растёт) или противоположенный ему (если ω убывает со временем). Его также можно располагать вдоль оси вращения.

Полное линейное ускорение

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,$$

а его модуль равен:

$$|\vec{a}| = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}. \quad (1.15)$$

Вектор полного ускорения образует с вектором линейной скорости угол θ , причем

$$\text{tg } \theta = \frac{\omega^2}{\alpha}.$$

Когда угловая скорость ω увеличивается, угол θ острый, в случае уменьшения — тупой.

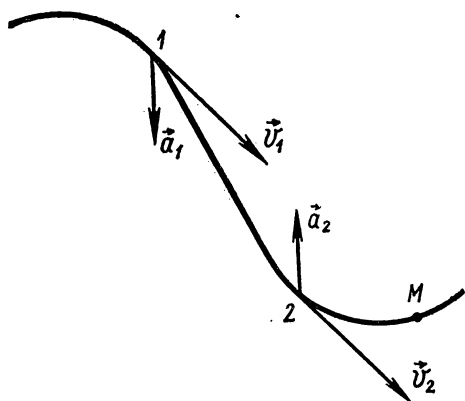


Рис. 1.8

При движении по произвольной траектории введенные выше понятия сохраняются, но в каждой точке траектории должен быть задан ее радиус кривизны (переменный).

На рисунке 1.8 изображены два положения движущейся точки. В положении 1 угол между векторами мгновенной скорости и мгновенного ускорения острый, поэтому скорость будет увеличиваться, а в положении 2, где угол тупой, скорость уменьшается.

Если тело участвует одновременно в нескольких вращениях, то угловые скорости складываются векторно. В этом легко убедиться на опыте, заставляя шар, на поверхности которого нанесены цветные точки, участвовать одновременно в двух вращениях вокруг различных осей; при этом точки обращаются в плоскостях, к которым вектор суммарной угловой скорости расположен под прямым углом. Угловые ускорения также складываются векторно.

1.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

Как известно, поступательным движением твердого тела называют такое, при котором все точки тела описывают одинаковые траектории (тело считается недеформируемым).

Для описания такого движения достаточно задать законы изменения со временем трех координат произвольной точки тела. В соответствии с этим говорят, что поступательно движущееся тело имеет три степени свободы. Если движение тела происходит в одной плоскости, то достаточно задать законы изменения двух координат, т. е. тело имеет две степени свободы. Наконец, если тело движется по заданной кривой, то остается всего одна степень свободы, так как длина дуги линии (отсчитываемая от произвольной точки линии) полностью определяет положение движущейся точки.

Любое вращение твердого тела можно описать тремя вращениями вокруг трех взаимно перпендикулярных координатных осей. Соответственно можно говорить о трех степенях свободы вращательного движения. Таким образом, недеформируемое тело имеет, вообще говоря, шесть степеней свободы, — следовательно, для описания его движения нужно задать шесть независимых уравнений.

При исследовании движений приходится иногда переходить от одной системы отсчета (с координатной системой $XOYZ$) к другой

системе отсчета (с координатной системой $X'O'Y'Z'$), причем вторая система отсчета движется относительно первой равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v} .

Полагая (что не уменьшает общности рассмотрения), что соответствующие координатные оси обеих систем параллельны друг другу, что скорость \vec{v} направлена вдоль оси X и что отсчет времени ($t=0$) начат в тот момент, когда начала координат совпадали друг с другом, найдем соотношения, связывающие координаты некоторой точки (x, y, z и x', y', z') в обеих системах:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & x &= x' + vt \\ y' &= y & \text{и} & y = y' \\ z' &= z & z &= z'. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Эти соотношения называются *преобразованиями координат Галилея* (при их записи сделано еще одно важное физическое допущение: мы предположили, что время в обеих системах течет одинаково, т. е. $t=t'$).

Пользуясь этим допущением, вычислим проекции скоростей (\vec{u}, \vec{u}') и ускорений (\vec{a}, \vec{a}') движущейся точки на оси координат и установим связь между ними; для упрощения записи применим часто используемые обозначения:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \dots, \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \dots$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \dot{x} - v & \dot{x} &= \dot{x}' + v \\ \dot{y}' &= \dot{y} & \vec{u}' &= \vec{u} - \vec{v} & \dot{y} &= \dot{y}' & \vec{u} &= \vec{u}' + \vec{v} \\ \dot{z}' &= \dot{z} & \dot{z} &= \dot{z}' \end{aligned} \quad (1.17)$$

и

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= \ddot{x} & \ddot{x} &= \ddot{x}' \\ \ddot{y}' &= \ddot{y} & \ddot{y} &= \ddot{y}' & \vec{a} &= \vec{a}' \\ \ddot{z}' &= \ddot{z} & \ddot{z} &= \ddot{z}' \end{aligned}$$

(так как $\frac{dv}{dt} = 0$).

Таким образом, если известны положение и скорость точки в одной системе, то можно определить ее положение и скорость в другой системе. Ускорение же в обеих системах оказывается одинаковым. Это утверждение верно для всех систем, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Уравнения (1.17) называются *преобразованиями скоростей Галилея*.

Глубокий смысл преобразований Галилея будет выяснен в главе 6. Сейчас отметим лишь, что использованный здесь и в § 1.2 при сложении и преобразовании скоростей принцип наложения

отражает тот факт, что движение тела может быть представлено как совокупность нескольких движений, происходящих независимо. Это и позволяет, например, при рассмотрении движения тела относительно двух систем отсчета векторно складывать скорость тела в одной из систем со скоростью самой системы относительно другой для получения скорости в этой системе или раскладывать вектор скорости на скорости составляющих движений. Такие операции допустимы, если движения независимы (принцип независимости движений). Как будет показано далее (см. гл. 6), принцип независимости движений имеет место лишь при скоростях, малых по сравнению со скоростью света в вакууме.

1.6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В КИНЕМАТИКЕ

Задачи, решаемые в кинематике, сводятся к двум типам:

1. Дан закон перемещения; нужно найти скорость и ускорение. Эта относительно простая задача решается при помощи операции дифференцирования.

Пусть радиус-вектор движущейся точки задан уравнением

$$\vec{R} = \vec{f}(t),$$

что равносильно заданию трех скалярных уравнений:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Дифференцируя один раз по времени, находим проекции скорости на соответствующие оси координат:

$$\dot{x} = \frac{df_1}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{df_2}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{df_3}{dt}.$$

При этом сама скорость равна:

$$\vec{v} = \vec{i} \dot{x} + \vec{j} \dot{y} + \vec{k} \dot{z}.$$

Повторное дифференцирование дает возможность определить ускорение:

$$\ddot{x} = \frac{d^2 f_1}{dt^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2 f_2}{dt^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2 f_3}{dt^2};$$

$$\vec{a} = \vec{i} \ddot{x} + \vec{j} \ddot{y} + \vec{k} \ddot{z}.$$

2. Дано ускорение; нужно найти закон изменения скорости и перемещения. Эта задача обратна первой; ее решают интегрированием. Из условия:

$$\vec{a} = \vec{f}(t); \quad d\vec{v} = \vec{a} dt$$

находим путем интегрирования:

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt + \vec{C}_1 = \vec{\varphi}(t) + \vec{C}_1,$$

где \vec{C}_1 — постоянная интегрирования, для определения которой должна быть задана скорость в некоторый момент (начальное условие).

Далее, так как

$$d\vec{R} = \vec{v} dt,$$

то повторное интегрирование дает:

$$\vec{R} = \int \vec{v}(t) dt + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2,$$

где \vec{C}_2 — новая постоянная интегрирования, для нахождения которой нужно задать еще одно начальное условие, например радиус-вектор в некоторый момент времени. В процессе вычислений векторные функции могут быть заменены тремя скалярными.

Итак, если первая задача сводится к чисто математическим операциям, то вторая требует, кроме того, задания двух начальных условий, т. е. дополнительных сведений физического характера.

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу о движении тела, брошенного под углом α_0 к земному горизонту с начальной скоростью \vec{v}_0 и ускорением \vec{g} , направленным вертикально вниз; сопротивлением воздуха пренебрежем. Выбрав систему координат (рис. 1.9), находим:

$$a_z \equiv 0, v_z \equiv 0, z \equiv 0.$$

Таким образом, движение происходит в плоскости XOY ; поэтому задача и называется плоской.

Проекция ускорения на ось Y a_y по условию равна $-g$:

$$a_y = -g.$$

Поэтому

$$v_y = -gt + C,$$

причем при $t=0$ должно быть:

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha_0.$$

Следовательно,

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt.$$

Смещение по вертикали определим из уравнения

$$y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{gt^2}{2} + C_2. \quad (1.18)$$

Так как при $t=0$ точка находилась в начале координат, то $C_2=0$.

Для проекций ускорения и скорости на ось X соответственно получаем:

$$a_x \equiv 0, v_x = \text{const} = v_0 \cos \alpha_0.$$

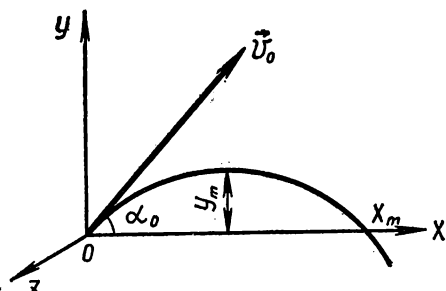


Рис. 1.9

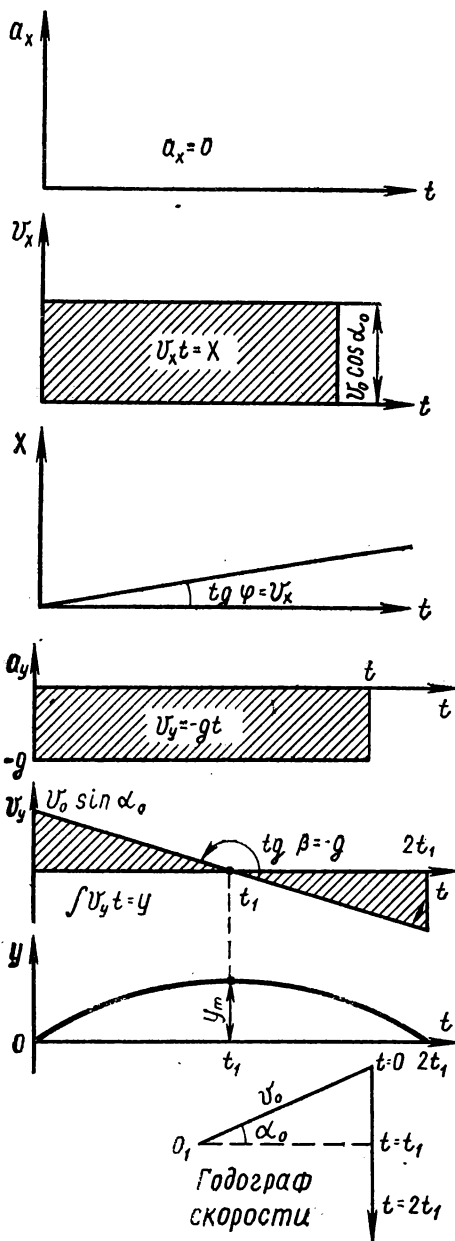


Рис. 1.10

Поэтому горизонтальное смещение

$$x = v_0 t \cos \alpha_0 \quad (1.19)$$

(новая постоянная интегрирования снова обращается в нуль).

Полная скорость по модулю равна:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \alpha_0},$$

а мгновенное значение угла, образуемого ею с горизонтальной осью, может быть найдено по тангенсу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha_0 - g t}{v_0 \cos \alpha_0}.$$

Проекция скорости на ось Y обращается в нуль в момент

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

При этом высота подъема точки наибольшая и равна:

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}.$$

Так как время прохождения любого вертикального отрезка вверх и вниз одно и то же, то до оси абсцисс точка опустится за время t_1 и пересечет ее на расстоянии

$$\begin{aligned} x_m &= v_x \cdot 2t_1 = \\ &= \frac{2v_0^2 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0 \end{aligned}$$

от начала координат (дальность полета). При этом наибольшая дальность (при заданной скорости v_0) получается при $\alpha_0 = 45^\circ$. Даль-

ности при углах α_0 и $90^\circ - \alpha_0$ одинаковы. Разумеется, движение может продолжаться и в области отрицательных ординат.

Исключая время из уравнений (1.18) и (1.19), получим уравнение траектории в явном виде:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}.$$

Легко убедиться, что траектория получается параболической и симметричной относительно наибольшей ординаты. Наглядное представление об особенностях рассмотренного движения дает опыт со струей воды, вытекающей из трубки, расположенной под углом к горизонту.

На рисунке 1.10 эта же задача решена графически. Кроме того, там же приводится и годограф скорости.

1.7. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ; СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Важным типом движения является гармоническое колебание. *Гармоническим колебанием* называют ограниченное периодическое движение, при котором смещение относительно положения равновесия меняется со временем по закону:

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.20)$$

Здесь X_m — амплитуда (наибольшее смещение);

$\omega t + \varphi_0$ — мгновенная фаза;

φ_0 — начальная фаза (при $t=0$);

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ — угловая или круговая частота (T — период).

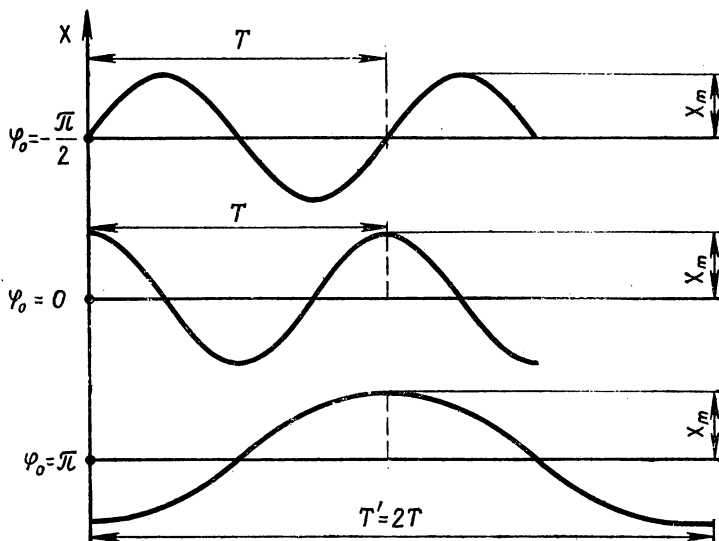


Рис. 1.11

Колебания, близкие к гармоническим, совершает тело, подвешенное на пружине и выведенное из положения равновесия, а затем предоставленное самому себе; так же движется маленький шар, подвешенный на длинной нити и выведенный из положения равновесия (математический маятник). Графики подобных движений изображены на рисунке 1.11.

Гармоническое колебание характеризуется мгновенной скоростью, равной:

$$\dot{x} = \omega X_m \cos \left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Она так же, как смещение, меняется гармонически с той же угловой частотой ω , но сдвинута по фазе (относительно смещения) на $\pi/2$ (или во времени — на четверть периода).

Ускорение этого движения, равное:

$$\ddot{x} = \omega^2 X_m \cos (\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x, \quad (1.21)$$

также является гармоническим; кроме того, оно пропорционально смещению и всегда направлено к положению равновесия.

Гармонические колебания характерны не только для механических явлений, такие процессы играют существенную роль в самых разнообразных физических явлениях (электромагнитных, в атомной физике и др.). В частности, в технике легко получаются гармонически меняющиеся напряжения (их используют при передаче электрической энергии на большие расстояния, в промышленности, в радиотехнике, телевидении и т. д.), что позволяет изучать особенности гармонического движения при помощи электронного осциллографа (краткое описание принципа действия этого прибора приводится в § 3.6).

Используя общность механических и электрических колебаний, мы в дальнейшем при описании колебательных движений будем широко применять электромеханические аналогии.

Точка может участвовать одновременно в нескольких гармонических движениях. При этом получается одно результирующее движение.

Если смещения складываются алгебраически (например, так ведут себя колебания давления в звуковых волнах), то сложение колебаний называют скалярным.

К скалярному сложению сводится и нахождение результирующего колебания векторов, направленных по одной прямой (например, перемещений, скоростей и пр.).

Пусть нужно скалярно сложить два колебания одинаковой частоты:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t, \quad x_2 = X_{m2} \cos (\omega t + \varphi_2).$$

Физически очевидно, что результирующее движение будет происходить с той же частотой:

$$x = x_1 + x_2 = X_m \cos (\omega t + \varphi). \quad (1.22)$$

Для нахождения амплитуды и начальной фазы суммарного движения развернем выражение (1.22):

$$X_{m1} \cos \omega t + X_{m2} \cos \varphi_2 \cos \omega t - X_{m2} \sin \varphi_2 \sin \omega t = X_m \cos \varphi \cos \omega t - X_m \sin \varphi \sin \omega t.$$

Так как это соотношение должно выполняться в любой момент t , то коэффициенты при $\cos \omega t$ (а также при $\sin \omega t$) в обеих частях равенства должны быть равны. Поэтому получается два уравнения для определения X_m и φ . Несложные вычисления дают:

$$\begin{aligned} X_m^2 &= X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2} \cos \varphi_2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{X_{m2} \sin \varphi_2}{X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Мы видим, что амплитуда существенно зависит от начальной фазы φ_2 и может меняться в пределах:

$$|X_{m1} - X_{m2}| \leq X_m \leq X_{m1} + X_{m2}. \quad (1.24)$$

Представление о полученных результатах может дать опыт с маятником, приводимым в сложное движение двумя последовательными ударами, направленными по одной прямой.

Проще проиллюстрировать сложение колебаний в электрической цепи, питаемой источником переменного напряжения, подав на вход осциллографа одновременно напряжения с различных участков электрической цепи, содержащей (для демонстрации сдвига фаз), кроме резистора, катушку индуктивности или конденсатор.

Еще удобнее воспользоваться двумя электрическими генераторами, допускающими независимую регулировку амплитуд складываемых колебаний (например, непосредственно на входе осциллографа). Однако при этом (даже если мы не будем менять начальную фазу) всегда наблюдается медленное (по сравнению с самими колебаниями) периодическое изменение амплитуды X_m ; его можно сделать очень медленным, но нельзя устранить полностью.

Объясняется это принципиальной невозможностью получить равные частоты от двух независимых источников. В опыте всегда получаются колебания несколько отличных частот:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t, \quad x_2 = X_{m2} [(\omega + \Delta\omega)t + \varphi_2].$$

Последнее выражение можно представить в виде:

$$x_2 = X_{m2} \cos [\omega t + (\varphi_2 + t\Delta\omega)]$$

и истолковать как колебание с частотой ω и медленно меняющейся начальной фазой. Так как суммарная амплитуда зависит от начальной фазы, то и происходят медленные периодические изменения амплитуды по мере того, как начальная фаза нарастает от нуля до 2π и дальше.

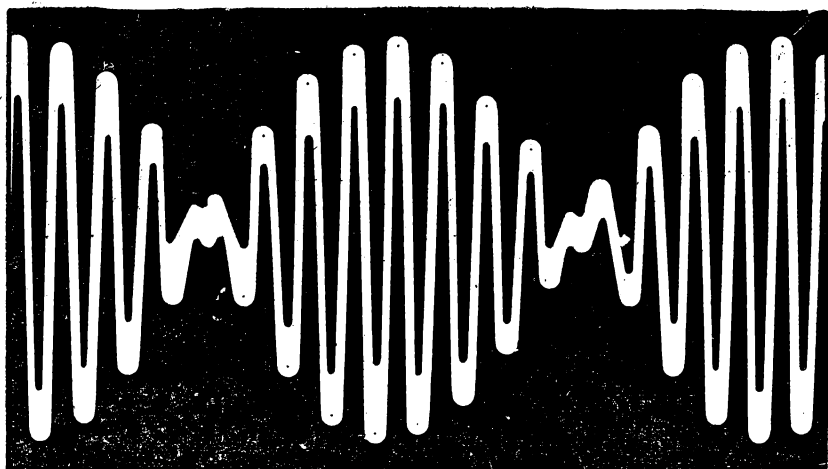


Рис. 1.12

Если амплитуды слагаемых колебаний равны и $\Delta\omega \ll \omega$, то сложение таких колебаний дает:

$$x \approx 2X_m \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t$$

(начальную фазу φ_2 можно принять равной нулю); результат можно толковать как колебания частоты ω с медленно меняющейся амплитудой и постоянной частотой (негармонические!). Вид этих колебаний показан на рисунке 1.12, где воспроизведена осциллограмма колебаний — их развертка по времени.

При сложении подобных звуковых колебаний слышен звук определенной высоты (частоты) с периодически меняющейся громкостью (амплитудой); такой процесс называют *биениями*.

При сложении колебаний с сильно отличающимися периодами T_1 и T_2 получается периодическое движение, его период равен общему наименьшему кратному периодов слагаемых колебаний; но форма кривой $x=f(t)$ в этом случае уже весьма далека от косинусоиды и зависит от соотношения амплитуд и начальных фаз.

В ряде практических приложений, в частности в акустике, оптике, радиотехнике, нужно знать не столько характер изменения периодического процесса во времени, сколько его спектральный состав (т. е. иметь сведения о частотах и амплитудах слагаемых процессов).

Для изучения спектрального состава существуют специальные приборы — анализаторы спектра. Об устройстве акустических анализаторов речь будет идти позже (см. § 10.1), сейчас же воспользуемся дающим наиболее наглядные представления электронным анализатором.

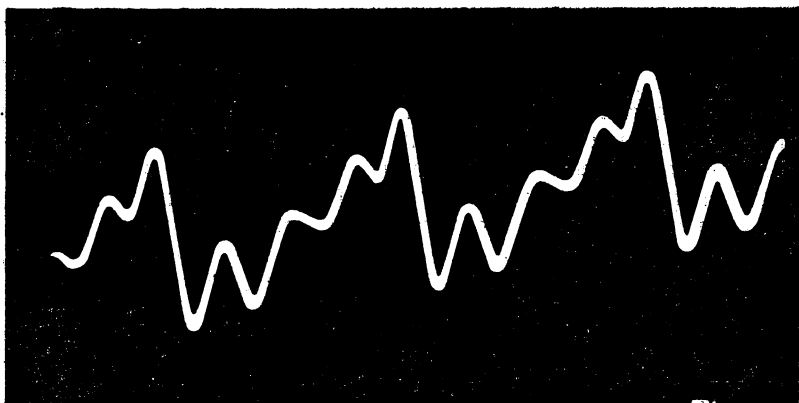


Рис. 1.13, а

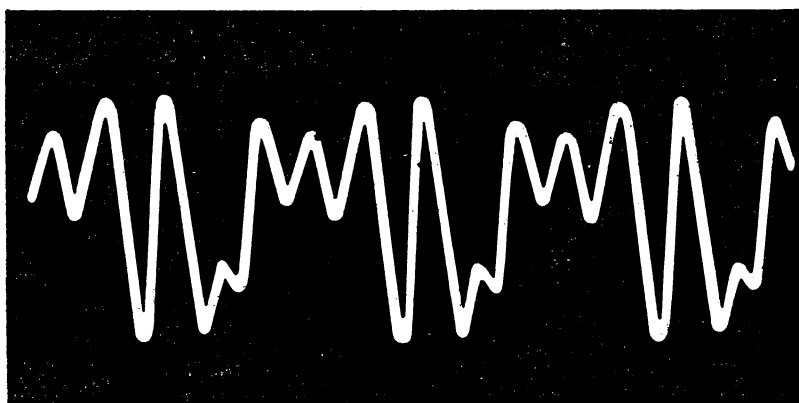


Рис. 1.13, б

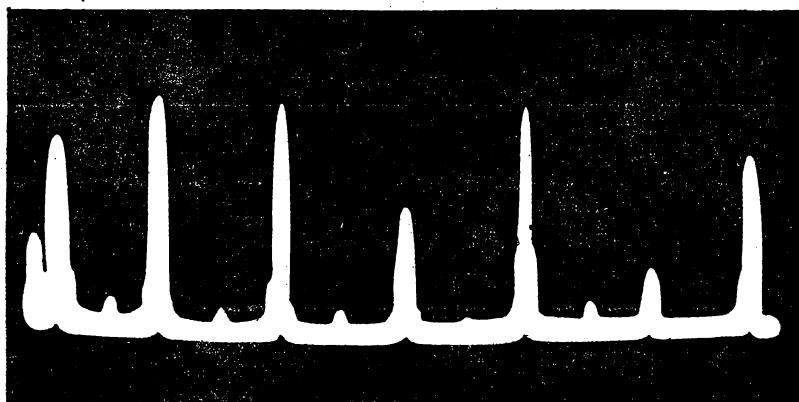


Рис. 1.13, в

Анализатор спектра для изучения электрических процессов отличается от осциллографа тем, что на экране его электронно-лучевой трубки луч смещается по горизонтали не пропорционально времени, как в осциллографе, а пропорционально частоте; вертикальное смещение луча пропорционально амплитуде исследуемых колебательных процессов. В результате при подаче на вход анализатора спектра переменных напряжений нескольких частот (сложного колебания) на экране воспроизводятся спектральные составляющие, высота которых содержит информацию об амплитуде, а положение по горизонтали — о частоте соответствующих составляемых сложного колебания.

Осциллограммы двух сложных колебаний, полученные на экране обычного осциллографа, показаны на рисунке 1.13, а, б; общая для обеих кривых спектрограмма $U=f(\omega)$ изображена на рисунке 1.13, в.

Итак, сложение нескольких гармонических колебаний разной частоты дает периодический, но не гармонический процесс.

Французский математик Ж. Фурье (1768—1830) доказал, что периодическая функция $f(t)$ периода T , удовлетворяющая некоторым специальным условиям (практически всегда выполняющимся в физике), может быть представлена рядом гармонических колебаний, носящим ныне имя Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{mk} \cos(k\omega t + \varphi_k). \quad (1.25)$$

Частоты этих колебаний (гармоник) являются целыми кратными «основной» частоты:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

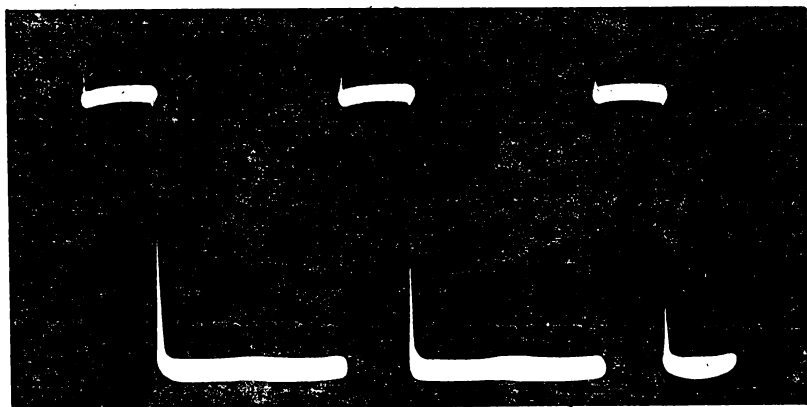


Рис. 1.14, а

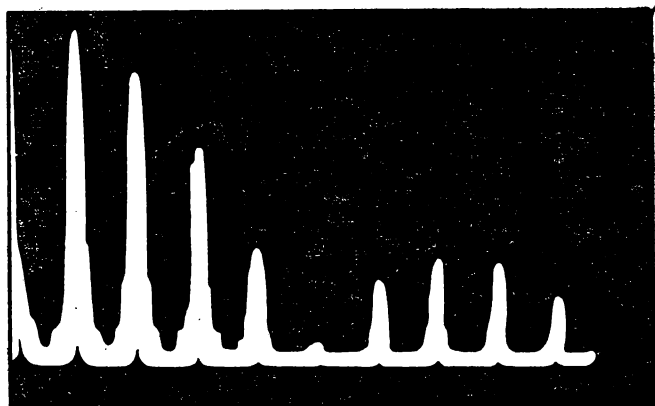


Рис. 1.14, б

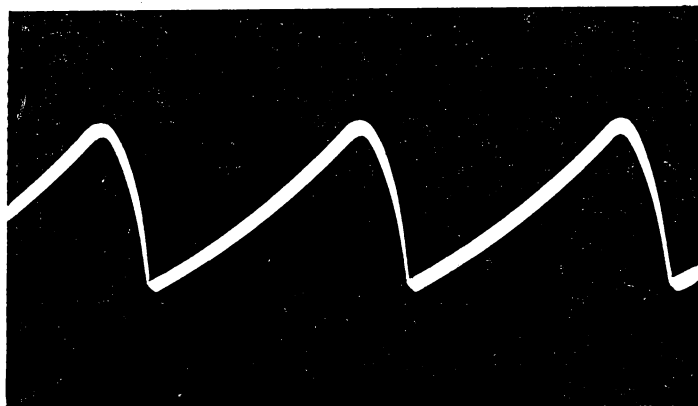


Рис. 1.14, в

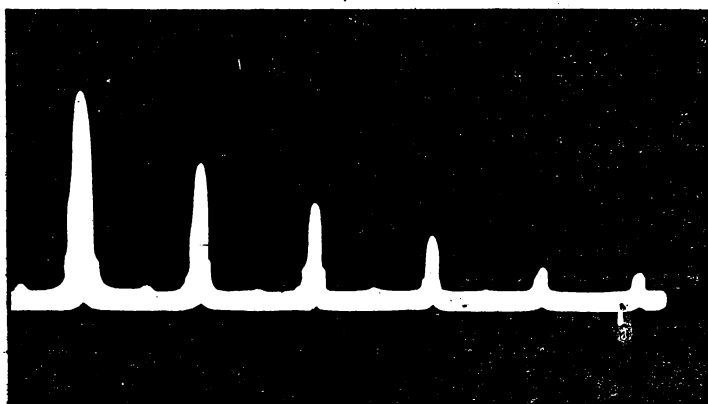


Рис. 1.14, г

Такое разложение и производится автоматически в анализаторах спектра.

Осциллограммы и спектрограммы некоторых периодических движений показаны на рисунках 1.14, а, б (сигнал имеет вид периодически повторяющегося прямоугольного импульса) и 1.14, в, г (напряжение медленно нарастает с течением времени и относительно быстро спадает). В последнем случае амплитуды гармоник обратно пропорциональны последовательным целым числам (1, $1/3$, $1/5$, ...).

При сложении нескольких гармонических колебаний равной частоты можно вместо сложных тригонометрических расчетов применить условный графический метод векторных диаграмм. Суть его состоит в следующем.

Выберем на плоскости произвольную ось OX и условимся изображать скалярное колебание

$$x_1 = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

вектором \vec{X}_{m1} , длина которого пропорциональна X_{m1} , а угол между осью и вектором равен углу начальной фазы φ_1 (рис. 1.15).

Вообразим теперь, что наш вектор вращается вокруг точки O с угловой частотой ω . Тогда проекция этого вращающегося вектора на ось OX в любой момент равна:

$$x = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

т. е. представляет мгновенное смещение.

Если теперь нужно сложить два колебания:

$$x_1 = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

и

$$x_2 = X_{m2} \cos \omega t,$$

то, построив соответствующие векторы, можно найти их геометрическую сумму \vec{X}_m (см. рис. 1.15).

Проецируя векторы на ось OX и помня, что проекция суммы векторов равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов, мы убеждаемся, что вектор \vec{X}_m изображает суммарное колебание, определяя его амплитуду и начальную фазу φ . Построенный

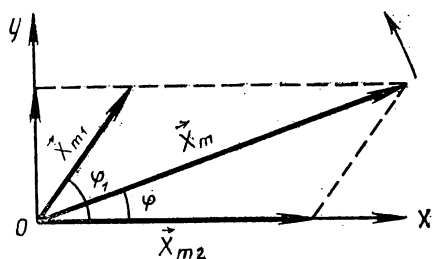


Рис. 1.15

векторный треугольник с течением времени поворачивается, но не меняет своей формы (ведь частоты всех векторов одинаковы!). Поэтому на практике никаких вращений векторной диаграммы производить не нужно — достаточно построить ее один раз.

Если бы складываемые колебания отличались по частоте, то векторный треугольник с течением времени изменял бы свою форму и такое простое рассмотрение было бы невозможным.

Удобство метода векторных диаграмм можно показать на задаче о суммировании N гармонических колебаний, имеющих равные амплитуды X_m и частоты ω , с линейно нарастающей начальной фазой:

$$x = \sum_{N=0}^{\infty} X_m \cos(\omega t + N\varphi_0), \quad (1.26)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{p}, \quad p — \text{целое число.}$$

Представим эти колебания векторами; они образуют стороны правильного p -угольника (рис.1.16). Около него можно описать окружность радиусом $R=OA$, причем

$$X_m = 2R \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Амплитуда результирующего колебания изобразится вектором $\overrightarrow{OB} = \vec{X}_{m0}$, причем сразу может быть найден его модуль:

$$X_{m0} = 2R \sin \left| \frac{N\varphi_0}{2} \right| = X_m \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{N}{p} \right)}{\sin \frac{\pi}{p}} \right|. \quad (1.27)$$

Из полученного выражения видно, что найденная сумма обращается в нуль при целочисленных значениях отношения $\frac{N}{p}$; наибольшие значения она принимает при полуцелых значениях этого отношения.

1.8. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД¹

С методом векторных диаграмм тесно связан аналитический метод комплексных амплитуд, значительно облегчающий расчеты,

¹ Этот параграф при первом чтении можно опустить.

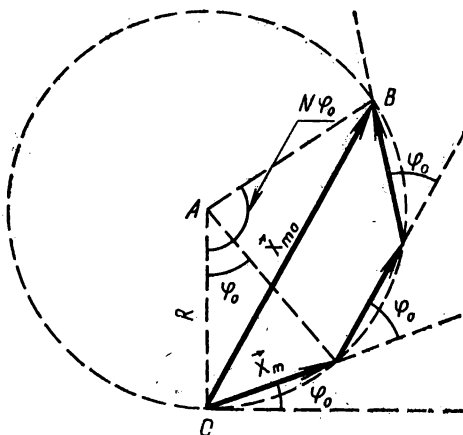


Рис. 1.16

которые при его использовании непосредственно сводятся к алгебраическим операциям.

Для уяснения сущности этого метода обратимся вновь к рисунку 1.15. Легко видеть, что мгновенные проекции сторон векторного треугольника на ось OY изменяются по синусоидальному закону; например, для суммарного вектора \vec{X}_m получим:

$$y = X_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Если рассматривать плоскость чертежа как плоскость комплексных величин:

$$z = a + jb, \quad j = \sqrt{-1},$$

считая вертикальную ось мнимой, то вектор \vec{X}_m представит комплексное число¹:

$$\dot{z} = X_m \cos(\omega t + \varphi) + j X_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.28)$$

По известной теореме Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \\ &= \dot{X}_m \exp(j\omega t), \end{aligned} \quad (1.29)$$

где независящая от времени величина

$$\dot{X}_m = X_m \exp(j\varphi) \quad (1.30)$$

называется комплексной амплитудой. Она определяет амплитуду и начальную фазу вектора \vec{X}_m , представляющего комплексное число z .

Найдем производную по времени от выражения (1.29):

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{z}}{dt} &= j\omega \dot{X}_m \exp(j\omega t) = \omega \dot{X}_m \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) \exp(j\omega t) = \\ &= \omega X_m \exp\left[j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp(j\omega t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Таким образом, дифференцирование комплексной величины сводится к умножению модуля на ω и увеличению начальной фазы на $\pi/2$. Интегрирование же сводится к умножению на $\frac{1}{\omega}$ и изменению фазы на $-\pi/2$. Действительно,

$$\int \dot{z} dt = -\frac{j}{\omega} \dot{z} = \frac{X_m}{\omega} \exp\left[j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp(j\omega t). \quad (1.32)$$

Итак, основные операции математического анализа заменяются простыми операциями умножения и деления. Поэтому уравнения, содержащие производные (дифференциальные уравнения), заменяются алгебраическими уравнениями.

¹ Точку над буквой здесь следует понимать как символ комплексного числа.

Далее, из теории сложения комплексных чисел известно, что действительные и мнимые части суммируются порознь, так что если

$$\dot{z}_1 = a_1 + j b_1, \quad \dot{z}_2 = a_2 + j b_2,$$

то сумма

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = \dot{z} = a + j b = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2). \quad (1.33)$$

Суть метода комплексных амплитуд такова: аналитическое представление колебания

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

рассматривается как действительная часть комплексного числа:

$$x = \operatorname{Re}(\dot{z}), \quad \dot{z} = \dot{X}_m \exp(j\omega t).$$

Все вычисления проводятся с этими комплексными представлениями, а в конечном результате физический смысл приписывается только действительной части решения; это можно сделать, основываясь на свойстве (1.33), если только все вычислительные операции были линейны.

Пусть, например, нужно сложить два колебания:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t$$

и

$$x_2 = X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (1.34)$$

Представим их комплексными числами:

$$\dot{z}_1 = \dot{X}_{m1} \exp(j\omega t),$$

$$\dot{z}_2 = \dot{X}_{m2} \exp(j\varphi_2) \exp(j\omega t).$$

Сумма их есть

$$\dot{z} = \dot{z} \exp(j\omega t) = \dot{z} \exp(j\varphi) \exp(j\omega t). \quad (1.35)$$

Очевидно, что

$$\dot{z} \exp(j\varphi) = (X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_2) + j X_{m2} \sin \varphi_2.$$

Поэтому получается:

$$x = \operatorname{Re}(\dot{z}) = Z \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.36)$$

При этом неизвестные амплитуда и фаза удовлетворяют уравнениям

$$Z^2 = X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2} \cos \varphi_2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_{m2} \sin \varphi_2}{X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_2}.$$

Полученные результаты, конечно, совпадают с ранее найденными (уравнение 1.23).

1.9. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Практический интерес представляет колебательный процесс, получающийся при сложении колебаний, происходящих в пространстве во взаимно перпендикулярных направлениях. Примером такого процесса является движение маятника, которому сообщают последовательно два взаимно перпендикулярных движения с помощью двух ударов. Аналогичный опыт может быть осуществлен с электронным пучком в электронно-лучевой трубке, если на входы вертикального и горизонтального отклонений луча осциллографа подать два гармонических напряжения одинаковой частоты.

Вначале рассмотрим сложение взаимно перпендикулярных колебаний, происходящих с одинаковой частотой. Пусть даны колебания, описываемые соответственно уравнениями

$$\begin{aligned}x &= X_m \cos \omega t, \\y &= Y_m \cos (\omega t + \varphi).\end{aligned}\tag{1.37}$$

Траектория результирующего движения точки будет лежать внутри прямоугольника со сторонами длиной $2X_m$ и $2Y_m$.

Чтобы определить явный вид траектории, исключим время из (1.37). Для этого напомним:

$$\begin{aligned}\frac{x}{X_m} &= \cos \omega t, \\ \frac{y}{Y_m} &= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Умножим первое уравнение на $\cos \varphi$ и вычтем из него второе. Получим:

$$-\frac{y}{Y_m} + \frac{x}{X_m} \cos \varphi = \sin \omega t \sin \varphi.$$

Теперь умножим первое уравнение (1.38) на $\sin \varphi$:

$$\frac{x}{X_m} \sin \varphi = \cos \omega t \sin \varphi.$$

Возводя это уравнение в квадрат и складывая с предыдущим уравнением, также возведенным в квадрат, приходим к выражению:

$$\left(\frac{x}{X_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y_m}\right)^2 - \frac{2xy}{X_m Y_m} \cos \varphi = \sin^2 \varphi,\tag{1.39}$$

представляющему уравнение эллипса, для которого направления колебаний x и y не являются главными осями.

Заслуживают внимания частные случаи:

а) $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$.

Тогда

$$\left(\frac{x}{X_m} \mp \frac{y}{Y_m}\right)^2 = 0, \quad y = \pm \frac{Y_m}{X_m} x.$$

Полученные уравнения означают, что движение происходит по прямой, проходящей через начало координат (положение равновесия) и лежащей в I и III квадрантах (при $\varphi=0$) или II и IV квадрантах (при $\varphi=\pi$).

б) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.

В этом случае

$$\left(\frac{x}{X_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y_m}\right)^2 = 1.$$

Траектория представляет эллипс, для которого направления колебаний являются главными осями. В зависимости от значения фазового угла эллипс обегается точкой по часовой стрелке или против нее.

Если в данном случае амплитуды слагаемых колебаний будут равны, то результирующее движение будет происходить по окружности, центр которой лежит в положении равновесия. Этим резуль-

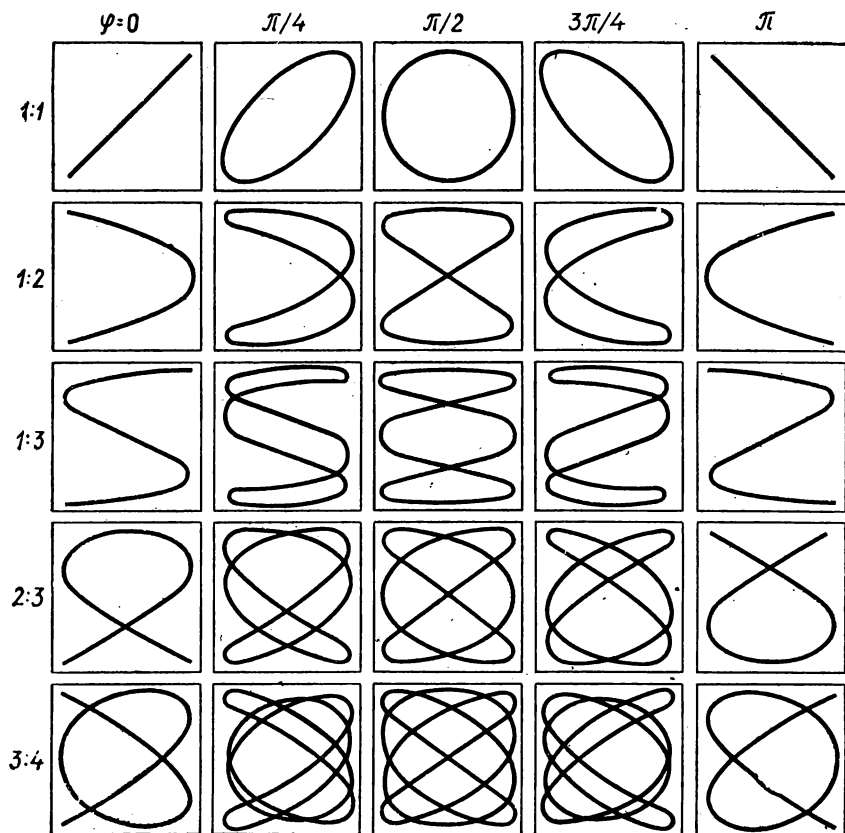


Рис. 1,17

татом мы неявно пользовались в § 1.8, знакомясь с методом комплексных амплитуд.

Отсюда следует и обратное утверждение: равномерное обращение точки по окружности с круговой частотой ω можно рассматривать как совокупность двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний той же круговой частоты с амплитудами, равными радиусу окружности, и сдвигом по фазе $\pi/2$. В этом можно убедиться, наблюдая проекции обращаемого по окружности тела на двух взаимно перпендикулярных экранах.

Если отношение частот складываемых колебаний равно отношению $\frac{q}{p}$ небольших целых чисел, то получаются своеобразные траектории (фигуры Лиссажу), форма которых (при данном отношении частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}$) существенно зависит от начальных фаз колебаний.

На рисунке 1.17 показаны фигуры Лиссажу, получившиеся при различных отношениях частот (указаны слева) и различных начальных фазовых углах (указаны вверху).

Число пересечений фигур Лиссажу с осями координат пропорционально частотам. Поэтому по виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной, что находит практическое применение.

При больших значениях p и q фигуры делаются весьма сложными и практического значения не имеют.

2.1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. СИЛА

Динамика, в отличие от кинематики, устанавливающая только связи между перемещением и временем, рассматривает и причины, вызывающие то или иное перемещение.

Повседневный опыт показывает, что любое тело, движущееся на Земле или вблизи ее поверхности, само по себе останавливается, если каким-либо образом не воздействовать на него другими телами. Недостаточно критическая оценка результатов опыта, пока понятие о сопротивлении, испытываемом движущимся телом при взаимодействии с окружающей средой, еще не было создано в физике, приводила к мнению, что для поддержания движения даже с неизменной скоростью необходимо воздействие окружающих тел. Эта точка зрения господствовала в физике со времен величайшего философа древности Аристотеля (384—322 гг. до н. э.) до конца XV в.

Галилей, по-видимому, первым осознал, что прекращение движения есть результат каких-то воздействий, препятствующих движению (трение). Он понял, что без взаимодействий тело должно двигаться равномерно и прямолинейно (либо покоиться), а взаимодействия вызывают изменения движения, т. е. ускорения. Это умозаключение, выходящее за пределы непосредственного опыта, явилось одной из величайших абстракций в истории физики.

Ньютон в своих законах динамики принял и развил мысль Галилея.

Первый закон динамики Ньютона гласит: «Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока внешние воздействия (силы) не выведут его из этого состояния».

Но описание движения возможно только в некоторой системе отсчета. Следовательно, первый закон допускает существование хоть одной системы отсчета, где он выполняется. С другой стороны, система отсчета может быть связана с любым телом. Применяя преобразования Галилея, можно убедиться, что первый закон Ньютона выполняется во всех системах отсчета, связанных с телами, движущимися равномерно и прямолинейно относительно вышеуказанной системы. Такие системы называют *инерциальными*, а первый закон часто называют *законом инерции*, по-

нимая под инерцией сохранение физическими телами состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения при отсутствии воздействий на них со стороны окружающих тел.

Первый закон Ньютона, утверждающий существование множества инерциальных систем, ничего не говорит о том, как именно изменится состояние движения тела при воздействии на него других тел. В физике вместо слов «тела взаимодействуют» принято употреблять слова «между телами действуют силы», причем под силой при этом понимают количественную характеристику взаимодействия.

Повседневный опыт показывает, что одним из результатов действия силы (а для точек, способных двигаться в любом направлении, т. е. обладающих тремя степенями свободы, — единственным результатом) является приобретение ускорения.

Например, все тела, взаимодействуя с Землей, испытывают (в данном месте) одинаковое ускорение, направленное к Земле.

Если тело несвободно, то окончательный результат действия силы оказывается иным.

Прикрепим к нижнему концу вертикальной нерастянутой пружины некоторый груз и осторожно отпустим его. Благодаря притяжению Земли (его называют силой тяжести) груз и с ним нижний конец пружины начинают двигаться вниз с ускорением \vec{g} . Но как только груз сместится, пружина деформируется и появится сила, направленная вверх (так как пружина стремится сократиться) и уменьшающая ускорение. Поэтому движение груза замедлится. В результате груз совершает довольно сложное движение (затухающие колебания, см. гл. 8). В конечном счете он остановится, растянув пружину на отрезок x . Итак, конечным результатом действия постоянной силы на несвободное тело (пружину) является статическая деформация.

Предполагая, что одинаковые причины в одинаковых условиях приводят к одинаковым результатам, мы можем сравнить силы по создаваемой ими деформации одной и той же пружины. Установив равенство двух сил, можно воздействовать на ту же пружину сразу двумя силами. При этом, как показал экспериментально Р. Гук (1635—1703), в известных пределах наблюдается прямая пропорциональность между силой \vec{F} и вызываемой ею деформацией x :

$$\vec{F} = k\vec{x} \quad (\text{з а к о н Г у к а}).$$

Здесь вектору перемещения конца пружины \vec{x} сопоставлена сила, действующая в направлении вызываемого ею перемещения. Следовательно, силе приписывается векторный характер.

Коэффициент k , зависящий от размеров и материала пружины, называют жесткостью. Пока он постоянен, деформация называется упругой.

Как показывает опыт, силы, обладая векторными свойствами, подчиняются принципу наложения (складываются геометрически).

2.2. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. МАССА

Второй закон Ньютона, характеризующий количественный результат действия силы, сформулирован Ньютоном для материальной точки. Под *материальной точкой* понимают тело исчезающе малых размеров (по сравнению с расстоянием до взаимодействующих тел); но, в отличие от геометрической точки, материальная точка обладает способностью взаимодействовать с другими телами, и ей приписывается некоторая масса (см. ниже).

Воздействуя разными силами на одно и то же тело и измеряя возникающие при этом ускорения, можно установить зависимость между силой и ускорением.

Обобщая результаты подобных опытов, Ньютон пришел к формулировке второго закона, который в простейших случаях¹ гласит: «Ускорение, сообщаемое материальной точке, пропорционально действующей силе и совпадает с ней по направлению»:

$$\vec{F} = k_1 m \vec{a}. \quad (2.1)$$

Постоянная k_1 зависит от выбора единиц измерения, множитель m характеризует свойства материальной точки, испытывающей действие силы, и называется ее *инертной массой*.

Далее Ньютон показал, что силы, подобно ускорениям, складываются векторно, а масса обладает свойством аддитивности, т. е. если из тел с массами m_1, m_2, \dots образовать одно тело, то его масса будет равна:

$$m = \sum_{i=1}^k m_i.$$

Кроме того, Ньютон считал, что масса не зависит от состояния тела (в частности, от его скорости). Позже М. В. Ломоносов (1711—1765) и другие ученые подтвердили на опытах этот закон сохранения массы. В наши дни выяснилось, что при внутриядерных процессах масса тела может изменяться. В рамках классической механики закон сохранения массы можно считать справедливым.

Если второй закон применяют для описания поступательного движения твердого тела, то его массу считают сосредоточенной в центре масс (см. § 2.7), практически совпадающем с центром тяжести.

До XX в. массу рассматривали как меру количества материи. Нужно, однако, сказать, что весьма широкое философское понятие «материя» не может быть охарактеризовано количественно. Количественные характеристики возможны для описания отдельных свойств, присущих материальным телам (плотность, упругость и т. д.). Сочетание же слов «количество материи» лишено содержания, как и сочетание слов «количество движения».

¹ Силы действуют на практически недеформируемое твердое тело, движущееся поступательно и приобретающее поступательное ускорение,

Если коэффициент пропорциональности в формуле второго закона принять равным единице, то выражение (2.1) примет вид:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.2)$$

Сила, сообщающая единице массы единичное ускорение, сама является единичной силой и называется ньютоном (Н):

$$1\text{ Н} = 1\text{ кг} \cdot 1\text{ м/с}^2. \quad (2.3)$$

Введем теперь уточнение: сам Ньютон вводил массу под знак производной и пользовался весьма важным понятием *механического импульса* движущейся точки, определяемого как произведение массы на скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.4)$$

Тогда второй закон приобретает более общий характер:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (2.5)$$

и формулируется следующим образом: **Скорость изменения механического импульса пропорциональна действующей силе и совпадает с ней по направлению.** В таком виде он может быть применен для случая меняющейся массы (например, для описания полета ракеты во время работы ее двигателей).

Уравнения (2.2) и (2.5) называются уравнениями движения.

Уравнение (2.5) можно переписать и так:

$$d\vec{p} = \vec{F} dt. \quad (2.6)$$

Это означает, что изменение импульса пропорционально силе и времени ее действия. Следовательно, одно и то же изменение импульса может быть создано большой силой за малый промежуток времени и малой силой за больший промежуток.

Наконец, следует отметить, что результат действия силы не зависит от присутствия других сил и от имеющегося уже движения, так как и силы и ускорения подчиняются принципу наложения.

В связи со сказанным нужно сделать следующее замечание. В кинематике возможность геометрического сложения перемещений, скоростей и ускорений как векторов мы объясняли, ссылаясь на принцип независимости движений. В динамике векторное сложение сил и импульсов сил производится на основании того же принципа. Однако здесь необходимо учитывать, что свойства тел под действием сил могут изменяться. Так, если пружина растягивается силой \vec{F}_1 , а затем прикладывается к ней сила \vec{F}_2 , то утверждение, что действие суммы сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ равносильно сумме действий сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , справедливо только при условии линейности пружины, т. е. постоянства ее жесткости k . Если же жесткость сама зависит

от деформации, то смещения при деформации принципу наложения уже не подчиняются, хотя для действующих сил этот принцип сохраняется (его в этом случае часто называют принципом суперпозиции).

Если силы на тело не действуют, то ускорение отсутствует, что вполне соответствует первому закону. Этого и следовало ожидать, так как законы не должны противоречить друг другу.

Ускорение отсутствует и при обращении в нуль суммы сил, действующих на тело. Но при этом физическое тело (т. е. совокупность точек) оказывается деформированным действующими на него силами. Поэтому здесь нельзя говорить о частном случае действия первого закона.

2.3. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

В третьем законе Ньютон подчеркивает, что силы всегда суть результат взаимодействия. Третий закон гласит: «Силы взаимодействия, испытываемые двумя материальными точками, равны по модулю, противоположны по направлению, и направления их совпадают с прямой, соединяющей точки».

Аналитически он может быть выражен так:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

где \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} — силы, приложенные к разным телам (рис. 2.1).

Это могут быть силы притяжения, например между двумя материальными точками (рис. 2.1, а) или двумя разноименными электрическими зарядами, или силы отталкивания (между одноименными электрическими зарядами, рис. 2.1, б).

Чтобы выяснить, как взаимодействуют макроскопические тела, их (мысленно!) разбивают на элементарные части с массами dm и суммируют силы взаимодействия по всему объему тел. При этом неявно допускается, что масса распределена непрерывно, хотя хорошо известно, что тела состоят из отдельных молекул или атомов. Однако допущение непрерывности (очень удобное с математической точки зрения) приемлемо, так как масса молекул исчезающе мала по сравнению с массой макроскопического тела (тело с массой 1 кг состоит примерно из 10^{26} молекул). Конечно, Ньютон этого числа не знал, но, обладая гениальной интуицией, предугадал истину и оперировал с массой, как с непрерывно меняющей-

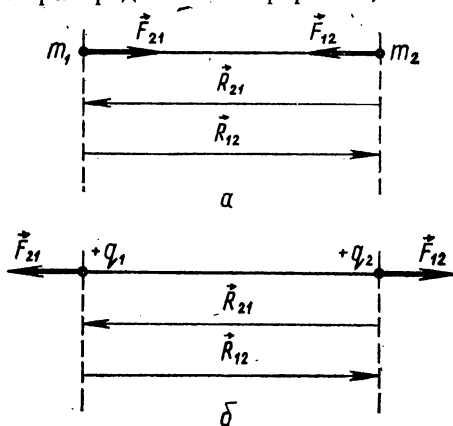


Рис. 2.1

ся величиной, подобно длинам и промежуткам времени, создав для этого основы современного математического анализа.

Следует особо подчеркнуть, что законы Ньютона применимы к силам любой природы, коль скоро заданы модуль силы и ее направление. Если возникает вопрос о природе действующих сил, то он должен решаться дополнительными физическими исследованиями. Так, силы всемирного тяготения и силы взаимодействия разноименных электрических зарядов одинаково зависят от расстояния. Поэтому, изучив действие одних, можно автоматически перенести результаты на случай действия других.

2.4. ПРИРОДА СИЛ

Несмотря на кажущееся разнообразие взаимодействий, все они сводятся к следующим трем видам:

1. *Гравитационное взаимодействие* — взаимное притяжение всех тел природы, не зависящее от свойств промежуточной среды; широко известным примером является притяжение тел Землей.

Закон взаимодействия материальных точек с массами m_1 и m_2 (закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном в конце XVII в.) в математическом виде записывается так:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{R_{12}^3} \vec{R}_{12}, \quad (2.7)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$. Вектор \vec{R}_{12} (см. рис. 2.1, а) направлен от притягивающей точки к притягиваемой, в индексе первая цифра определяет притягивающую точку.

Этот закон можно представить и в таком виде:

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{\Gamma}_1, \quad (2.8)$$

где $\vec{\Gamma}_1$ — величина, характеризующая силу в данной точке пространства, окружающего притягивающее тело массой m_1 ; ее называют *ускорением* или *напряженностью* поля тяготения (понятие поля как определенной формы материи будет развито позже, в гл. 11). Вблизи поверхности Земли напряженность поля тяготения Земли есть ускорение свободного падения \vec{g} , причем $|\vec{g}| \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.

2. *Электромагнитное взаимодействие* — взаимодействие между неподвижными или движущимися электрическими зарядами. Этим взаимодействием, в частности, обусловлены всевозможные силы межмолекулярного и межатомного типа.

Взаимодействие между неподвижными электрическими зарядами (см. рис. 2.1, б) подчиняется закону, открытому Кулоном:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R_{12}^3} \vec{R}_{12} = q_2 \vec{E}_1, \quad (2.9)$$

где $k=9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$; q_1, q_2 — электрические точечные заряды, измеряемые в кулонах¹ (Кл); ϵ — относительная электрическая проницаемость однородной безграничной среды, окружающей заряды (она показывает, во сколько раз взаимодействие в данной среде уменьшается по сравнению с взаимодействием в вакууме); ϵ — безразмерная величина; \vec{E}_1 — напряженность в точке электрического поля, существующего вокруг заряда q_1 . Единицей ее измерения служит вольт на метр (В/м).

Действие на движущийся заряд q описывается более сложно — силой Лоренца. Она равна:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}], \quad (2.10)$$

где \vec{E} — напряженность электрического поля (оно создается не только неподвижными зарядами, но и другими причинами); \vec{B} — характеристика магнитного поля, созданного движущимися зарядами (токами), называемая индукцией магнитного поля и измеряемая в теслах (Т); \vec{v} — скорость движущегося заряда.

Скорости упорядоченно движущихся зарядов в твердых и жидких телах не превышают 10^{-4} — 10^{-3} м/с. В газах они возрастают в десятки тысяч раз, а в вакууме могут быть доведены до скорости, близкой к скорости света; в этом последнем случае движение уже не подчиняется ньютоновской механике.

3. *Ядерное и слабое взаимодействия* — взаимодействия между микрочастицами; их изучают в ядерной физике.

Так как в подавляющем большинстве явлений, рассматриваемых в данном курсе, атомные ядра никаким изменениям не подвергаются, то мы будем иметь дело главным образом только с первыми двумя типами взаимодействий.

Здесь сообщены лишь краткие сведения об основных силах природы, необходимые для решения механических задач и понимания механических примеров; более детальное изучение сил и их свойств составляет, в сущности, предмет всего курса физики. Отметим, что некоторые из основных сил (например, ньютоновское и кулоновское взаимодействия) зависят только от координат взаимодействующих точек (статический или квазистатический случай взаимодействия). Но сила Лоренца зависит также от скорости. Макроскопические силы (все они сводятся к указанным выше основным силам) могут зависеть как от координат, так и от скорости. Такова, например, сила трения (см. § 3.4).

Несмотря на кажущуюся простоту, законы Ньютона весьма содержательны и область их применения достаточно широка.

Законам Ньютона подчинено движение небесных тел, космических кораблей, запускаемых человеком, разнообразных механизмов современной техники, заряженных частиц в слабых электрических

¹ 1 Кл — громадный заряд. Он содержит приблизительно $6,25 \cdot 10^{18}$ элементарных электрических зарядов.

и магнитных полях, молекул газа при не слишком больших давлениях и не слишком низких температурах.

Отклонения от законов Ньютона наблюдаются только при очень больших скоростях, когда классическая механика заменяется более общей — механикой специальной теории относительности. Но последняя не отменяет, как будет показано ниже, механику Ньютона, а включает ее как предельный случай.

Применяя законы Ньютона к тем или иным проблемам, следует всегда помнить, что они сформулированы для инерциальных систем и применимы без оговорок только в таких системах отсчета.

Подводя итог их первичному рассмотрению, отметим, что законы Ньютона, как и другие фундаментальные законы природы, являются обобщением опытных фактов, постулатами, которые могут быть проверены в области применимости с доступной степенью точности, но не доказаны.

2.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В ДИНАМИКЕ

Задачи, решаемые в динамике, сводятся к двум основным:

I. Рассчитать движение по заданным силам (и начальным условиям).

II. По заданному движению найти вызывающие его силы.

В первом случае используются уравнения движения (второй закон Ньютона), причем действующие силы должны быть заданы. Кроме того, необходимо задание начальных условий — значений смещений и скорости в начальный (или иной) момент времени.

Интегрируя уравнения Ньютона, получают выражения для скорости и смещения в функции времени.

Обычно эти решения используются для предсказания будущих движений относительно $t=0$ (время положительно). Но с таким же успехом время можно считать и отрицательным, т. е. исследовать прошлое (конечно, в обоих случаях предполагается, что никаких новых сил не появляется).

Так как и силы, и начальные условия могут быть заданы лишь с известной степенью точности, то и полученные решения верны только с ограниченной точностью, и с течением времени могут накапливаться значительные ошибки. Поэтому в реальных условиях (например, при космических полетах) через определенные промежутки времени истинное положение космического корабля проверяется опытным путем, и эти новые данные используются как новые начальные условия для нового решения уравнений движения.

Во втором случае задается траектория, и задача сводится к нахождению ускорений, по которым можно судить и о действующих силах.

Замечание об ограниченном времени приложения полученного решения, сделанное выше, сохраняет силу и в этом случае.

Если изучается поступательное движение, макроскопическое тело можно рассматривать как точку.

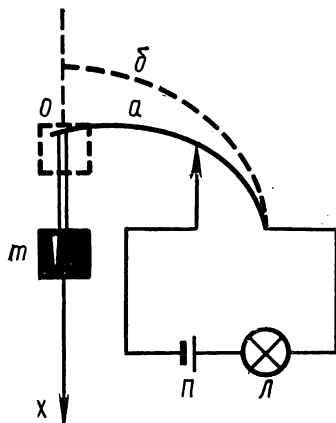


Рис. 2.2

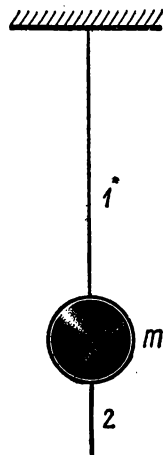


Рис. 2.3

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение законов Ньютона.

1. На массивной основе расположена лампочка накаливания L и источник питания P ; цепь замыкается пружиной, изогнутой действием силы тяжести тела массой m (рис. 2.2, пружина в положении a). Если ослабить действие силы, придержав тело пальцем, то пружина распрямляется, контакт нарушается и лампочка гаснет (рис. 2.2, пружина в положении b).

Прибор закрепляют на тросе, переброшенном через блок. Подняв прибор, предоставляют ему возможность падать. При этом лампочка гаснет. Объяснене: когда прибор был неподвижен относительно Земли, сила тяжести груза $m\vec{g}$ уравнивалась силой деформации пружины kx :

$$mg - kx = 0.$$

При этом деформация

$$x = \frac{mg}{k}$$

достаточно велика, чтобы обеспечить замыкание контакта.

Когда же тело падает (не совсем свободно, ускорение получается несколько меньшим, чем \vec{g}), то сила $m\vec{g}$ проявляет себя и динамически, обеспечивая ускорение, и статически, вызывая деформацию x_1 , причем

$$ma = mg - kx_1.$$

Очевидно, что при этом $x_1 < x$. Если деформация достаточно уменьшилась, то контакт разрывается.

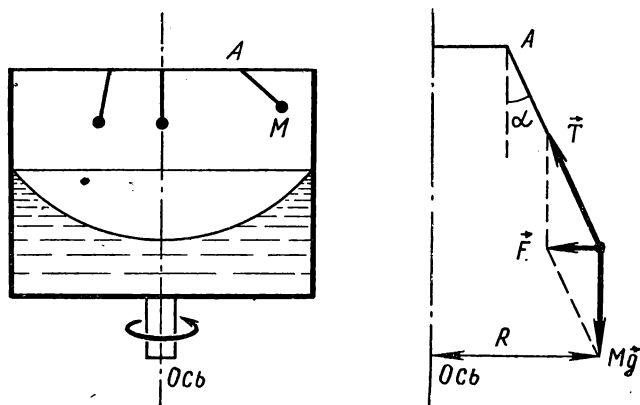


Рис. 2.4

2. На нити 1 (рис. 2.3) подвешен массивный шар массой m (нить растянута силой тяжести шара почти до предела прочности); снизу к шару прикреплена такая же (или даже более прочная) нить 2.

Если сильно дернуть за конец нити 2, то она рвется. Если же тянуть ее с небольшой силой, то рвется нить 1. Объяснение: в первом случае большая сила не успевает сообщить ускорение шару; он практически не смещается, нить 2 не выдерживает приложенной силы и рвется. Во втором случае сила невелика, нить 2 ее длительно выдерживает, шар успевает сместиться, вследствие чего увеличивается растяжение нити 1, которая и рвется, не будучи в состоянии выдержать дополнительную нагрузку.

3. На центробежную машину ставят сосуд с жидкостью (рис. 2.4); на раме, прикрепленной к сосуду, подвешены маятники. При вращении сосуда вокруг вертикальной оси наблюдается отклонение маятников от вертикали (тем большее, чем они дальше расположены от оси) и искривление поверхности жидкости; оба явления выражены тем сильнее, чем больше угловая скорость вращения сосуда. Устойчивое состояние достигается не сразу, но мы обсудим именно это состояние.

В начале вращения в движение приходит точка подвеса A маятника; лишь благодаря изменению натяжения нити постепенно ускоряется и шарик массой M . При установившемся движении сумма сил натяжения нити \vec{T} и тяжести $M\vec{g}$ должна обеспечить необходимое для вращения центростремительное ускорение $\vec{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \vec{R}$.

Следовательно,

$$M\vec{a}_{\text{цс}} = \vec{T} + M\vec{g} = -M\omega^2 \vec{R} = \vec{F}, \quad (2.11)$$

где \vec{R} — радиус-вектор устойчивого вращения. Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (2.12)$$

и угол отклонения от вертикали α растет вместе с угловой скоростью и расстоянием от оси вращения.

Отметим, что этот же эффект приводит к уменьшению веса тела на вращающейся Земле (см. § 5.2). Но угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси мала, а потому эффект мал даже на экваторе (радиус $R \leftarrow$ наибольший) — всего 0,3%.

Искривление поверхности жидкости (см. рис. 2.4) вызвано той же причиной, что и отклонение маятника. Можно показать, что поверхность принимает (при устойчивом вращении) форму параболоида вращения.

2.6. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

В § 1.5 были выведены преобразования Галилея (1.17). Из них следует, что ускорение данной материальной точки во всех инерциальных системах одинаково. Так как масса точки в ньютоновской механике не зависит от скорости, то она постоянна во всех инерциальных системах отсчета. Силы в механике Ньютона могут зависеть от расстояния между взаимодействующими телами и от их относительных скоростей. Так как эти величины не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой, то силы также не меняются. Это значит, что сохраняется форма законов механики. Кроме того, это означает, что равномерное прямолинейное движение не влияет на механические явления и что никакими механическими опытами, произведенными внутри системы, невозможно обнаружить ее прямолинейное и равномерное движение. Это важное заключение, называемое «галилеевым принципом относительности», сыграло большую роль в развитии механики. Сам Галилей, обосновавший это положение, проиллюстрировал его следующими словами: «Заклучите себя с каким-нибудь приятелем в возможно просторном помещении под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных маленьких летающих животных. Пусть будет там также большой сосуд с водой и в нем рыбки. Повесьте также на потолок ведро, из которого капля за каплей вытекала бы вода в другой сосуд с узким отверстием, находящийся внизу под ним. Пока не движется корабль, наблюдайте, как эти летающие животные с равной быстротой будут летать во все стороны комнаты. Увидите, что рыбы будут плавать безразлично во все стороны; падающие капли будут падать все в подставленный сосуд... Наблюдайте хорошенько за всем этим и заставьте привести в движение корабль с какой угодно быстротой. Если движение будет равномерно, то вы не заметите ни малейшей перемены во всех указанных действиях и ни по одному из них не в состоянии будете судить, движется ли корабль или стоит на месте... Капли будут падать, как прежде, в нижний сосуд, и ни одна не упадет по направлению к корме, несмотря на то, что, в то время как капля находится в воздухе, корабль уходит вперед на несколько локтей. Рыбы в

поэтому

$$\sum_{i=1}^k \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^k \vec{F}_i, \quad (2.14)$$

где

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^k \vec{p}_i \quad (2.15)$$

есть полный механический импульс системы, а $\sum \vec{F}_i$ — сумма всех внешних сил. Но полный импульс можно представить как произведение массы системы

$$M = \sum_{i=1}^k m_i$$

на некоторую скорость \vec{V} , определяемую из условия:

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \vec{v}_i}{M}. \quad (2.16)$$

Полный импульс системы \vec{p} можно приписать точке, называемой *центром масс* или *центром инерции*, в которой сосредоточена вся масса системы.

Координаты центра масс определяются выражениями:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{M}; \quad Y = \frac{\sum_{i=1}^k m_i y_i}{M}; \quad Z = \frac{\sum_{i=1}^k m_i z_i}{M}, \quad (2.17)$$

так что радиус-вектор центра масс равен:

$$\vec{R} = \vec{i} X + \vec{j} Y + \vec{k} Z = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (2.18)$$

где \vec{r}_i — радиус-векторы точек системы.

Так как система под действием внешних сил движется, то координаты центра масс (а также и точек системы) со временем изменяются. Используя уравнение (2.18), найдем скорость центра масс:

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{p}}{M}.$$

Мы видим, что она совпала со скоростью, введенной уравнением (2.16).

Если нас интересует движение системы в целом, то оказывается весьма удобным связать начало координат с центром масс.

Уравнение (2.14) показывает, что движение центра масс может быть изменено только действием внешних сил. Если же система замкнута ($\sum \vec{F}_i = 0$), то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{p} = M\vec{V} = \text{const}, \quad (2.19)$$

т. е. полный импульс замкнутой системы сохраняется неизменным, а центр масс движется равномерно и прямолинейно (или покоится). При этом внутренние силы могут вызывать различные движения точек системы, изменяя импульсы каждой из них.

Уравнение (2.19) представляет один из важнейших законов природы — закон сохранения импульса замкнутых механических систем.

Наглядной иллюстрацией закона (2.19) является опыт с игрушечным локомотивом. Если последний подвесить на нитях (для устранения влияния силы тяжести) и завести его механизм, то колеса начинают вращаться, но локомотив в целом не движется, так как внутренние силы не могут сместить центр масс. Но достаточно поднести к колесам рельсы, прикреплённые, например, к тележке, как локомотив приходит в движение. Сделав тележку подвижной, легко убедиться, что направление движения тележки противоположно направлению движения локомотива.

При подъёме ракеты скорости ее и выбрасываемых газов относительно Земли могут быть весьма значительны, но центр масс системы (ракета — газы) движется только под действием притяжения Земли сравнительно медленно.

Следует иметь в виду, что центр масс, координаты которого определяются уравнением (2.17), может не совпадать ни с одной из точек системы. Так, у однородного кольца центр масс лежит в его геометрическом центре. У тел не слишком больших размеров центр масс практически совпадает с центром тяжести. Но для больших тел, размеры которых превышают десятки километров (например, озеро Байкал), этого совпадения не будет, так как при расчете положения центра тяжести придется считаться с непараллельностью вектора ускорения \vec{g} в различных точках тела.

Солнце и планеты Солнечной системы движутся вокруг их общего центра масс, и мы допускаем ошибку, утверждая, что «планеты обращаются вокруг Солнца». Однако эта ошибка мала, так как масса Солнца значительно (в 750 раз) превосходит общую массу планет, а потому центр масс системы почти совпадает с центром масс Солнца.

2.8. О ПОСТУЛАТАХ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

Сформулированный выше для замкнутых механических систем закон сохранения импульса получен как следствие второго и третьего законов Ньютона, носящих, как уже отмечалось в § 2.5, ха-

рактен постулатов. Дальнейшее развитие физики показало, что его область применимости значительно шире и не ограничивается рамками классической механики. Закон сохранения импульса, как и закон сохранения и превращения энергии (см. § 2.10), — универсальный закон природы. В курсе теоретической физики доказывается, что он в конечном счете связан с однородностью пространства (как закон сохранения энергии — с однородностью времени). Поэтому ясно, что в принципе построение классической механики возможно с другой аксиоматикой, чем та, которая была принята Ньютоном.

Легко показать, что, постулируя закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^k m_i \vec{v}_i = M\vec{V} = \text{const},$$

можно как следствие получить второй и третий законы Ньютона.

Действительно, чтобы система изменила скорость движения своего центра масс, она должна испытать внешнее воздействие (т. е. не быть замкнутой, иначе бы возникло противоречие с законом сохранения импульса).

Чем больше изменение импульса во времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{M d\vec{V}}{dt} = M\vec{a}$$

(массу M считаем постоянной), тем больше воздействие. Таким образом, $\frac{d\vec{p}}{dt}$ есть мера воздействия на систему, которую и определяют как силу \vec{F} .

Итак, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ — уравнение движения (второй закон Ньютона).

Естественно, что вид и смысл выражения сохраняются и при рассмотрении одного свободного тела, находящегося под действием силы \vec{F} .

Вернемся теперь к замкнутой системе (пусть она состоит из двух материальных точек), тогда:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

Мы получили закон равенства действия и противодействия сил (третий закон Ньютона).

В сочетании с первым законом Ньютона, постулирующим наличие бесконечного числа инерциальных систем отсчета, аксиоматическое введение закона сохранения импульса полностью исчерпывает систему постулатов классической механики.

Таким образом, обсужденная сейчас (без особой строгости изложения) система построения механики ограничивает число необходимых постулатов двумя вместо трех, использованных Ньютоном. В этом смысле она прогрессивней, но является более формальной и трудно иллюстрируемой экспериментально в процессе преподавания.

2.9. РАБОТА СИЛЫ. ЭНЕРГИЯ

Второй закон Ньютона утверждает, что непосредственным (и мгновенно возникающим) результатом действия силы является сообщение ускорения. А как описать результат действия силы за конечный промежуток времени? Для этого, оказывается, полезно ввести понятие *работа силы*. Работой силы \vec{F} , действующей на материальную точку массой m при перемещении последней на $d\vec{R}$, называют физическую величину, измеряемую скалярным произведением указанных величин:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{R} = F dR \cos(\vec{F}, \hat{d\vec{R}}). \quad (2.20)$$

Если $dR=1$ м, $F=1$ Н и $\cos(\vec{F}, \hat{d\vec{R}})=1$, то

$$dA = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Дж}.$$

1 Дж (джоуль) — единица измерения работы.

Так как $d\vec{R} = \vec{v} dt$, то работу можно представить и в таком виде:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = N dt,$$

где скалярная величина

$$N = Fv \cos(\vec{F}, \hat{\vec{v}}) \quad (2.21)$$

определяет работу в единицу времени. Она называется *мощностью* и измеряется в ваттах (Вт):

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Работа за конечный промежуток времени равна:

$$A = \int_0^t N dt = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F} \cdot d\vec{R}. \quad (2.22)$$

Спокойно идущий человек развивает мощность порядка 50 Вт; тренированный спортсмен может развить кратковременную мощность до 1,5 кВт. Мощность крупнейшей в мире Красноярской ГЭС равна $6 \cdot 10^9$ Вт.

В общем случае сила и скорость непараллельны друг другу. Но силу можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp},$$

где \vec{F}_{\parallel} параллельна скорости \vec{v} , \vec{F}_{\perp} перпендикулярна ей. Так как $\vec{F}_{\perp} \cdot \vec{v} = 0$, то

$$dA = F_{\parallel} v dt = \frac{dp}{dt} v dt = mv dv = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right).$$

Полная работа силы на конечном участке траектории, найденная интегрированием, равна:

$$A = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2. \quad (2.23)$$

В окончательное выражение вошли величины, характеризующие начальное и конечное состояние движущейся точки (в отличие от выражения для работы (2.20), описывающего процесс, а не состояние!). Физическая величина, определяемая состоянием точки (функция состояния) и равная:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m} = W_k, \quad (2.24)$$

называется *кинетической энергией точки*.

Уравнение (2.23) можно записать в виде:

$$A = \Delta W_k \quad (2.25)$$

и утверждать, что единственным результатом работы силы, параллельной скорости, является изменение кинетической энергии точки (если точка не подвержена действию других сил).

Так как сила, перпендикулярная скорости, не совершает работы, но лишь изменяет направление скорости, то уравнение (2.25) сохраняет свое значение при любом направлении силы.

Вообразим невесомую горизонтальную пружину, имеющую постоянную жесткость k . Один конец пружины закреплен (рис. 2.5), к другому прикреплено тело массой m и приложена сила \vec{F} , растянувшая пружину на отрезок x_0 .

Когда конец пружины совершит перемещение \vec{x} , то возникнет упругая сила $\vec{f} = -k\vec{x}$.

Второй закон Ньютона для этого случая запишется так:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{f},$$

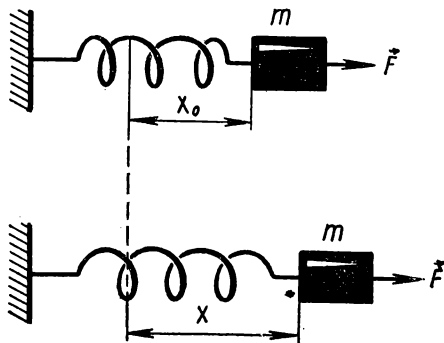


Рис. 2.5

поэтому

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + k\vec{x}.$$

Умножим обе части на $d\vec{x} = \vec{v}dt$ и проинтегрируем. Получим полную работу, совершенную силой \vec{F} :

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_0}^x \vec{F} \cdot d\vec{x} = m \int_0^v v dv + k \int_{x_0}^x x dx = \\ &= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{k}{2} (x^2 - x_0^2) = \Delta W_k + \Delta W_p. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Мы видим, что здесь результатом работы является не только прирост кинетической энергии тела массой m , но и изменение формы пружины, что учитывается вторым слагаемым, представляющим прирост энергии деформации (потенциальной энергии), которая также является функцией состояния:

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2. \quad (2.27)$$

При надлежащем подборе внешней силы прирост кинетической энергии может быть сделан весьма малым, так что изменение энергии деформации (потенциальной энергии) будет играть основную роль.

Из приведенного примера видно, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной:

$$W_p = \frac{1}{2} kx^2 + \text{const.}$$

Поэтому можно принять, что при $x=x_0$ она равна нулю.

Слово «потенциальная» подразумевает зависимость от положения взаимодействующих тел (или формы одного из них).

В общем случае при криволинейном движении всегда есть взаимодействие движущейся точки с окружающими телами; в разных точках криволинейной траектории, например при обращении материальной точки относительно некоторого центра (скажем, Земли вокруг Солнца), происходящем по эллипсу, меняется как кинетическая, так и потенциальная энергия точки и, следовательно, ее состояние. И только при обращении по окружности все положения движущейся точки энергетически равноценны, так как при этом результирующая сила всегда перпендикулярна скорости и работы не производит, т. е. не изменяет энергии материальной точки.

Если в механической системе действуют силы, зависящие только от относительного положения ее частей, то состояние системы полностью описывается ее потенциальной и кинетической энергией. Подобные системы называются *консервативными*. Найденный выше

результат — действие внешней силы изменяет кинетическую и потенциальную энергию системы — для них верен и носит общий характер.

Если внешние силы отсутствуют (замкнутая система), то нет и работы внешних сил. Поэтому сумма кинетической и потенциальной энергии сохраняется. Но внутренние силы могут изменять соотношение между этими энергиями.

Итак, для замкнутых консервативных систем (систем без трения) выполняется важнейший закон природы — закон сохранения и превращения механической энергии:

$$W = W_k + W_p = \text{const.} \quad (2.28)$$

Кинетическая энергия всегда положительна. Что касается потенциальной энергии, то выбор ее нулевого значения произволен и она может иметь любой знак. Так, в примере с пружиной мы могли принять за нуль потенциальной энергии ее значение до начала действия силы \vec{F} либо же при нулевой деформации пружины и т. п. Практически всегда важно знать не саму потенциальную энергию, а ее изменения в ходе какого-либо механического процесса.

2.10. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Рассмотрение вопроса об энергии системы полезно расширить, обсудив следующую задачу. К концу вертикальной невесомой пружины (жесткость k) подвешивают тело массой m и осторожно отпускают. Под действием силы тяжести $m\vec{g}$ груз опускается, и возникают колебания системы. С течением времени они становятся все менее заметными, и наконец система приходит в состояние покоя, причем пружина оказывается растянутой на отрезок x , определяемый условием обращения в нуль сил, испытываемых грузом:

$$kx = mg; \quad x = \frac{mg}{k}.$$

При этом потенциальная энергия пружины возросла на величину, равную:

$$\Delta W_d = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mgx.$$

Между тем внешняя сила совершила работу при опускании груза:

$$A = mgx = 2\Delta W_d. \quad (2.29)$$

Эта работа вдвое больше прироста потенциальной энергии пружины. Здесь есть кажущееся противоречие с уравнением (2.26), согласно которому прирост энергии системы равен работе внешней силы.

Конечно, в действительности противоречия нет, так как задача не является чисто механической. При колебаниях пружины, как показывает более глубокий экспериментальный и теоретический анализ процесса, увеличивается энергия беспорядочного движения частиц вещества пружины и окружающего воздуха — оба тела благодаря трению нагреваются. Как известно, энергию беспорядочного движения рассматривают как часть внутренней энергии тела. При нагревании тела его внутренняя энергия получает прирост $\Delta W_{\text{вн}}$.

В нашем случае только половина совершенной работы обеспечила деформацию пружины; вторая половина пошла на увеличение внутренней энергии. Если целью опыта было получение деформации пружины, то коэффициент полезного действия процесса составляет только:

$$\eta = \frac{\Delta W_{\text{д}}}{A} = 0,5; \quad (2.30)$$

при этом выполняется закон сохранения энергии в более общем виде:

$$A = \Delta (W_{\text{к}} + W_{\text{д}} + W_{\text{вн}}). \quad (2.31)$$

Следует подчеркнуть, что можно было бы ввести в нашу систему и Землю. Тогда система стала бы замкнутой, работа A была бы произведена за счет уменьшения потенциальной энергии тяготения груза к Земле:

$$A = -\Delta W_{\text{т}}$$

и полное изменение энергии системы было бы равно нулю:

$$\Delta (W_{\text{д}} + W_{\text{к}} + W_{\text{вн}} + W_{\text{т}}) = 0. \quad (2.32)$$

Энергию тяготения и энергию деформации можно объединить в общую потенциальную энергию:

$$W_{\text{д}} + W_{\text{т}} = W_{\text{п}}.$$

В дальнейшем мы встретимся с новыми видами энергии (электрической, магнитной, ядерной и пр.). Но для замкнутой системы закон сохранения и превращения энергии всегда выполняется совершенно строго.

В связи с введением представления о внутренней энергии — энергии беспорядочного движения частиц — обсудим следующий вопрос: раньше мы утверждали, что тело за счет работы внешней силы увеличивает свою кинетическую энергию; не скажется ли на этом утверждении учет внутренней энергии?

Пусть частицы неподвижного тела движутся беспорядочно со скоростями \vec{v}_i ; внутренняя энергия, обусловленная этим движением, равна:

$$W_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2,$$

где сумма берется по всем частицам. Однако вследствие полной беспорядочности движения частиц тело в целом неподвижно: его импульс равен нулю:

$$\vec{p}_0 = \sum m_i \vec{v}_i = 0. \quad (2.33)$$

Когда тело под действием внешних сил стало двигаться со скоростью \vec{V} , то скорости частиц оказались равными $\vec{v}_i + \vec{V}$, и полная энергия равна:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_i + \vec{V})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 + V^2 \cdot \frac{1}{2} \sum m_i + \vec{V} \cdot \sum m_i \vec{v}_i = \\ &= W_{\text{вн}} + W_k, \end{aligned} \quad (2.34)$$

так как последнее слагаемое равно нулю. Таким образом, прирост кинетической энергии был вычислен верно, а приобретение телом кинетической энергии упорядоченного движения не сказывается на его внутренней энергии, т. е. на энергии беспорядочного движения частиц тела.

2.11. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Законы Ньютона и законы сохранения механического импульса и энергии (в замкнутой системе) позволяют решать громадное количество механических задач.

1. Задача о вертикальном бросании тела массой M с поверхности Земли. Направим ось координат вверх (рис. 2.6) и примем потенциальную энергию системы «Земля — тело» равной нулю, когда тело находится на поверхности Земли¹. Телу сообщают вертикальную скорость v_0 (после этого воздействие на него прекращается!). На какую высоту поднимется тело? С какой скоростью оно вернется на Землю?

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + M g x.$$

Поэтому наибольшая высота подъема (при $v=0$) равна:

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (2.35)$$

а скорость в момент падения на Землю ($x=0$) равна:

$$v_1 = v_0 = \sqrt{2gx_m}.$$

¹ Понятие потенциальной энергии и свойства сил, зависящих только от относительного положения взаимодействующих тел, более строго будут рассмотрены в главе 11.

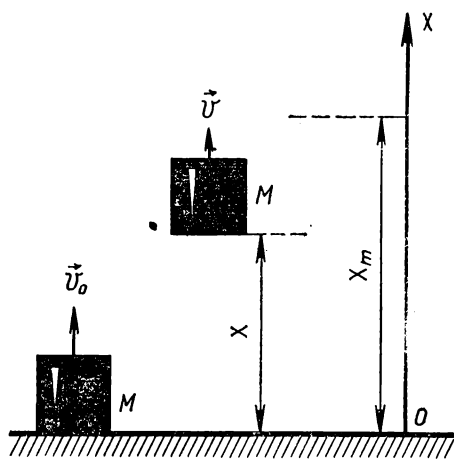


Рис. 2.6

2. Задача о движении маятника. При этом движении кинетическая энергия (она наибольшая в момент прохождения маятника через положение равновесия, т. е. наинизшее положение), равная:

$$W_{km} = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

преобразуется в потенциальную энергию тяготения (она максимальна в момент остановки маятника, поднявшегося на высоту h_m):

$$W_{pm} = mgh_m = W_{km}.$$

Галилей, прекрасно понимавший суть дела, поставил следующий замечательный опыт. На нити длиной L подвешен небольшой шарик (рис. 2.7). Можно заставить этот маятник качаться, подняв его шарик на высоту h_m и предоставив затем самому себе. Если во время прохождения шарика через наинизшее положение укоротить маятник, поставив около него стерженек S , то высота подъема не изменится, хотя скорость движения и частота колебаний изменятся весьма значительно.

3. Задача об устойчивом равновесии тела. Если в замкнутой системе потенциальная энергия минимальна, а кинетическая равна нулю, то, как следует из (2.28), такая система находится в состоянии покоя (устойчивого равновесия) и без действия внешних сил не может изменить его. Степень устойчивости равновесия определяется той минимальной энергией, которую нужно сообщить телу, чтобы заставить его выйти из положения равновесия. Так, если тело массой m лежит на дне ямки со стенками высотой h , то для того, чтобы заставить его покинуть ямку, нужно сообщить ему кинетическую энергию:

$$W_h \geq mgh$$

(трение не учитываем). Разумеется, при этом нужно позаботиться и о выборе направления вектора скорости. Например, для тела массой m , находящегося в асимметричной ямке (рис. 2.8), для движения направо требуется большая кинетическая энергия, чем для движения налево.

Нахождение системы в состоянии устойчивого равновесия часто называют «пребыванием в потенциальной яме», так как на графике, определяющем потенциальную энергию в функции расстояния между взаимодействующими телами, положению равновесия отвечает минимальная ордината кривой (своеобразная «яма»).

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой импульс и энергия системы (даже замкнутой) изменяются. Действительно, из преобразований Галилея видно, что скорости частей системы при этом изменяются, — следовательно, изменяется импульс и кинетическая энергия. Поэтому изменится и полная энергия системы. Но и в новой системе отсчета для замкнутой системы будут справедливы закон сохранения механического импульса и закон сохранения и превращения энергии.

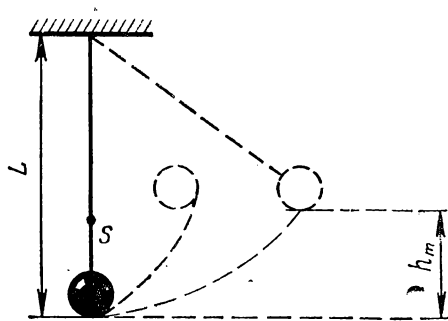


Рис. 2.7



Рис. 2.8

2.12. РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

При измерении физические величины сравниваются с однородными величинами, условно принятыми за единичные. При этом оказывается удобным ввести несколько основных величин (выбор их произволен), а для всех прочих вводить единицы, пользуясь физическими определениями или законами, устанавливающими связи между величинами.

Таким образом можно построить последовательную систему единиц. В разное время в физике применялись (да и сейчас еще применяются) различные системы. Мы будем пользоваться только международной системой (СИ — система интернациональная). Соотношения между единицами СИ и других систем следует искать в справочниках.

В СИ за основные единицы приняты (в механике): единица длины — метр; единица времени — секунда; единица массы — килограмм. Впоследствии будут указаны основные единицы, вводимые при изучении других разделов физики.

Пользуясь определением скорости как отношения перемещения ко времени, за единицу скорости мы должны принять скорость такого движения, при котором перемещение в 1 м совершается за 1 с (эта единица не имеет собственного наименования):

$$1 \text{ ед. скорости} = \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ с}} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Символическая формула, показывающая, как некоторая физическая величина связана с основными физическими величинами данной системы единиц, называется *формулой размерности*. На-

пример, для скорости формула размерности записывается в таком виде:

$$[\text{скорость}] = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]} = LT^{-1},$$

где для удобства записи основные величины обозначены буквами: L — длина, T — время.

Размерность не меняется при изменении масштаба основных единиц. Так скорость автомобиля часто выражают в километрах в час, например 60 км/ч. И хотя численное значение этой скорости в СИ будет иное — 16,7 м/с, но размерности в обоих случаях одинаковы.

Размерность может выражаться не обязательно через основные величины, но и через ранее введенные производные, что иногда даже удобнее. Так, размерность работы есть

$$[\text{работа}] = [\text{сила} \cdot \text{перемещение}].$$

По мере надобности мы уже вводили единицы производных механических величин; также будем поступать и дальше. Сводная таблица механических величин с их единицами приводится в конце этой книги.

В любом уравнении, описывающем физический закон или определение, обе части уравнения обязательно имеют одинаковые размерности. Поэтому, если закон связывает ранее установленные физические величины в некоторой новой комбинации, то может оказаться необходимым введение коэффициента пропорциональности, имеющего некоторую размерность; такой случай впервые встретился нам при формулировке закона всемирного тяготения.

3.1. СОУДАРЕНИЯ ТЕЛ

Применение основных законов сохранения хорошо поясняется теорией соударений. *Соударением* в физике называют взаимодействие сближающихся частиц (тел), результатом которого является изменение их скоростей и состояния.

Соударения принято разделять на *абсолютно упругие* и *неупругие*; действительные соударения в той или иной степени соответствуют такой классификации.

При *неупругом* соударении взаимодействующие тела в результате соударения приобретают одинаковую скорость и движутся вместе как одно общее тело; таково (в первом приближении) соударение шаров из мягкой глины: при взаимодействии они деформируются, но не восстанавливают первоначальной формы. Это значит, что внутренняя энергия шаров увеличивается за счет их кинетической энергии и потенциальной энергии их взаимодействия. Таким образом, рассматриваемая система неконсервативна.

Если потенциальной энергией можно пренебречь (например, при соударении небольших макроскопических незаряженных тел), то прирост внутренней энергии равен убыли кинетической. Поэтому законы сохранения энергии и импульса запишутся в этом случае так:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \Delta W_{\text{вн}}, \quad (3.1)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}, \quad (3.2)$$

где изменение внутренней энергии $\Delta W_{\text{вн}}$ — положительная величина; m_1 и m_2 — массы тел, \vec{v}_1 и \vec{v}_2 — их скорости до соударения, \vec{V} — скорость тел после соударения.

Рассмотрим частный случай «лобового» соударения, когда скорости направлены по прямой, соединяющей центры частиц. В этом частном случае векторное уравнение (3.2) заменяется одним скалярным:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V. \quad (3.3)$$

Отсюда скорость после соударения равна:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Из уравнения (3.1) находим:

$$\Delta W_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 > 0.$$

Изменение внутренней энергии, как и следовало ожидать, оказалось положительным.

Если скорость второго тела до соударения $v_2=0$, то

$$V = v_1 \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

и относительное изменение энергии:

$$\frac{\Delta W_{\text{вн}}}{W} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Поэтому, например, при ковке металла молотком массой m_1 , когда желательно кинетическую энергию молотка преобразовать в энергию деформации и внутреннюю энергию металла, выгодно класть металл на массивную наковальню ($m_2 \gg m_1$). Но при вбивании гвоздя требуется сообщать ему кинетическую энергию. Здесь выгодно иметь $m_1 > m_2$, т. е. массивный молоток.

В ядерной физике иногда желательно использовать соударения для превращения кинетической энергии частиц в их внутреннюю энергию. Если массы частиц одинаковы и одна из них покоится (точнее, обладает весьма малой скоростью: $v_2 \approx 0$), то при неупругом соударении

$$V = 0,5 v_1.$$

В этом случае прирост внутренней энергии равен:

$$\Delta W_{\text{вн}} = \frac{m_1}{4} v_1^2$$

и составляет лишь половину первоначальной кинетической энергии. Если же частицы равной массы соударяются, двигаясь друг другу навстречу с равными скоростями ($\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$), то после соударения $V=0$, прирост внутренней энергии $\Delta W_{\text{вн}} = m_1 v_1^2$, и вся кинетическая энергия переходит во внутреннюю.

Как видно из этого расчета, переход к «встречным» пучкам частиц оказывается перспективным. Так как при этом частицы движутся со скоростями, близкими к скорости света, то точный расчет должен выполняться по уравнениям теории относительности (глава 6), причем выигрыш (по сравнению с соударением с неподвижной частицей) оказывается во много раз больше, чем найденный нами.

Неупругие соударения часто осуществляются с целью разрушения частицы — мишени для получения новых частиц. Пусть исходная частица — мишень — обладает внутренней энергией $W_{\text{вн}}^0$, а ожидаемые осколки ее — внутренними энергиями $W_{\text{вн}}'$ и $W_{\text{вн}}''$.

Тогда самопроизвольный распад теоретически возможен (но может и не произойти), если выполнено неравенство:

$$W_{\text{вн}} > W'_{\text{вн}} + W''_{\text{вн}}, \quad (3.5)$$

так как при распаде осколки должны приобрести еще и кинетическую энергию (кроме того, распад часто сопровождается излучением, на что также расходуется энергия).

Если неравенство не соблюдено, то распад невозможен.

Но может оказаться, что при неупругом соударении частица, имеющая большую кинетическую энергию, сообщит мишени дополнительную внутреннюю энергию, обеспечивающую выполнение неравенства (3.5), следствием чего и явится желаемый распад.

В уравнениях (3.1 и 3.2), описывающих неупругое соударение, имеется четыре неизвестные величины (три составляющие скорости \vec{V} и $\Delta W_{\text{вн}}$), таково же и число независимых уравнений, поэтому задача о неупругом соударении разрешима в любом случае.

Соударение называют *упругим*, если в результате соударения внутренняя энергия частиц не изменяется, и они снова удаляются друг от друга.

Примером макроскопического упругого соударения может служить соударение шаров из слоновой кости (после взаимодействия они практически полностью восстанавливают первоначальную форму). В качестве примера упругого соударения ядерных частиц можно привести соударение положительно заряженного ядра гелия (α -частицы) с ядром другого атома, также несущим положительный заряд, если при взаимодействии не происходит перестройка атомного ядра.

При упругом взаимодействии частицы обмениваются лишь кинетической энергией и импульсом, причем обе величины сохраняются (замкнутая консервативная система), поэтому можно написать:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (3.6)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (3.7)$$

Здесь \vec{u}_1 и \vec{u}_2 — скорости частиц после соударения. Таким образом, в этом случае число неизвестных (шесть) превышает число уравнений (четыре), и в общем виде задача неразрешима: требуются дополнительные сведения о силах, действующих в процессе взаимодействия частиц.

Обсудим некоторые разрешимые частные случаи упругого соударения.

1. Пусть частица соударяется с неподвижной ($v_2=0$), равной ей по массе ($m_1=m_2=m$) частицей. Тогда уравнения (3.6) и (3.7) упрощаются:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad (3.8)$$

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Полученные соотношения означают, что векторы скорости образуют прямоугольный треугольник. Следовательно, частицы разлетятся под прямым углом. Однако без каких-то дополнительных сведений невозможно указать направления скоростей обеих частиц. Очевидно, соударение — не лобовое.

2. Другой важный случай — лобовое соударение частиц разной массы. В этом случае векторное уравнение (3.6) заменяется одним скалярным:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Теперь задача приобрела полную определенность. Решая систему (3.9), находим:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}, \\ u_2 &= \frac{2m_1 v_1 - (m_1 - m_2) v_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Интересны следующие примеры:

Пусть массы равны ($m_1 = m_2 = m$). Тогда

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

Соударяющиеся частицы «обмениваются скоростями». Например, если частица соударяется с равной по массе неподвижной частицей, то она останавливается, а другая частица приобретает скорость первой.

В ядерных реакторах получают нейтроны (нейтральные частицы с массой, весьма близкой к массе атома водорода) со скоростями v_0 порядка 10^7 м/с. Их необходимо замедлить, снизив скорость до $v_k = 3 \cdot 10^3$ м/с. Для этого их заставляют двигаться в среде, содержащей атомы тяжелого водорода (масса их вдвое превышает массу атома обычного водорода), — в «тяжелой воде», молекулы которой состоят из двух атомов тяжелого водорода и атома кислорода.

Начальную скорость ядер атомов тяжелого водорода (дейтронов) можно считать равной нулю. После лобового соударения нейтрона с ядром тяжелого водорода скорость нейтрона составит, согласно уравнению (3.10):

$$v = \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right| v_0 = \frac{1}{3} v_0.$$

После n лобовых соударений конечная скорость будет равна:

$$v_k = \frac{v_0}{3^n}.$$

Если требуется уменьшить скорость в N раз, то необходимое число лобовых соударений составит:

$$n = \frac{\lg N}{\lg 3}.$$

В нашем примере $N = 3,3 \cdot 10^3$; $n \approx 7$.

Так как не все соударения лобовые, а при косых соударениях нейтрон теряет меньшую долю кинетической энергии, то практически необходимое число соударений несколько больше вычисленного.

Толщина слоя воды, в котором нейтроны будут замедлены, определяется полученным значением n .

С чисто механической точки зрения гораздо лучше было бы замедлять нейтроны на атомах водорода, где достаточно одного лобового соударения. Но есть ряд дополнительных соображений, выходящих за пределы механики и не допускающих такого замедления.

Если $m_1 \ll m_2$ и $v_2 = 0$, то

$$u_1 \approx -v_1; \quad u_2 \approx 0. \quad (3.11)$$

Такие условия получаются, например, при ударе шара о стенку. Шар, ударяющийся по нормали (стенка есть часть шара неопределенно большого радиуса, и лобовое соударение должно осуществляться именно по нормали), отскакивает, меняя направления скорости на противоположное и сохраняя ее значение.

Может возникнуть недоумение: если импульс шара изменяется, то стенка должна получить импульс и кинетическую энергию. У нас же оказалось, что $u_2 \approx 0$.

Суть дела заключается в том, что решение (3.11) есть предельный случай, верный для бесконечно массивной стенки. У реальной стенки (при сильном неравенстве масс) скорость оказывается исчезающе малой, как и доля кинетической энергии, отданной шаром стенке. Чем сильнее неравенство масс, тем точнее результат, описываемый уравнением (3.11).

3. Наконец, если вектор скорости \vec{v}_1 образует с нормалью к стенке угол α (рис. 3.1), то вектор следует разложить на касательную и нормальную составляющие. Очевидно, взаимодействие не может изменить касательной составляющей, но меняет знак нормальной составляющей скорости. Поэтому вектор \vec{u}_1 будет наклонен к нор-

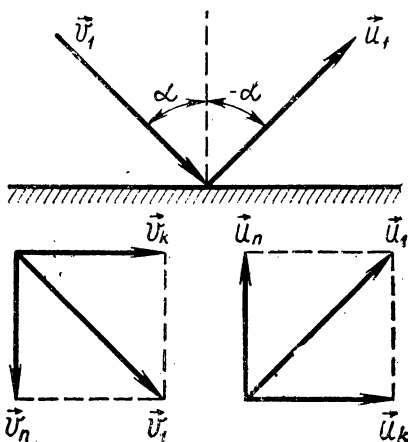


Рис. 3.1

мали под углом $-\alpha$, т. е. шар отскочит по другую сторону нормали. При этом векторы \vec{v}_1 , \vec{u}_1 и нормаль будут лежать в общей плоскости (плоскость падения), определяемой нормалью и вектором \vec{v}_1 .

Так как свет отражается от зеркала по такому же закону, то физика XVII—XVIII вв. приписывала свету механическую природу; в XIX в. выяснилась ошибочность этого вывода: природа света оказалась электромагнитной (см. «Оптику и атомную физику»).

Мы предполагали, что соударяющиеся объекты движутся поступательно и ни с чем не взаимодействуют. Поэтому полученные соотношения весьма приближенно (а иногда совсем плохо) выполняются, скажем, при игре на бильярде, где трение шаров о сукно и возможность сообщать им различные вращения весьма усложняют расчет условий движения и соударения шаров.

Кроме того, реальные макроскопические соударения обычно лишь приближенно можно отнести к чисто упругим или чисто неупругим; в мире атомных и ядерных соударений эти приближения обычно выполняются лучше, но также не всегда полностью. Так, электрон, взаимодействующий с атомом, может ионизировать его, т. е. отдать часть энергии на сообщение кинетической энергии электрону атомной оболочки — соударение не будет ни чисто упругим, ни чисто неупругим.

3.2. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Законы механики могут быть применены к решению задачи о движении тела с переменной массой (например, ракеты).

Ракета — это устройство, движущееся вследствие того, что при быстром сгорании топлива струя горячих газов уносит некоторый импульс, заставляя корпус ракеты перемещаться в противоположную газам сторону (ведь систему, если не учитывать ее взаимодействие с Землей и другими телами, можно рассматривать как замкнутую, — следовательно, ее центр масс должен оставаться неподвижным, а суммарный импульс — сохраняться).

Рассмотрим движение ракеты, удаляющейся от Земли. Начнем с достаточно общего случая, когда систему «ракета — газы» нельзя считать изолированной от внешних воздействий (например, притяжения к Земле и сопротивления воздуха).

Выберем систему координат, связанную с Землей, которую будем считать неподвижной.

Пусть мгновенное значение переменной массы ракеты равно M , скорость ее относительно Земли \vec{v} ; тогда мгновенный импульс ракеты равен:

$$\vec{p} = M\vec{v}.$$

Вследствие сгорания топлива из сопла ракеты вырываются газы со скоростью \vec{u} относительно ракеты. Это значит, что их скорость относительно Земли составит:

$$\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}.$$

Выходя из ракеты, газы за время dt уносят массу $dM_1 > 0$ и соответственно импульс, равный:

$$d\vec{p}_1 = dM_1 \vec{v}_1.$$

Поэтому скорость ракеты увеличится на $d\vec{v}$ и изменение ее импульса составит:

$$d\vec{p} = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - M\vec{v},$$

где изменение массы ракеты $dM = -dM_1$, так как $dM + dM_1 = 0$.

По второму закону Ньютона изменение суммарного импульса системы «ракета — газы» равно:

$$d\vec{p} + d\vec{p}_1 = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - M\vec{v} + dM_1 \vec{v}_1 = \vec{F} dt, \quad (3.12)$$

где \vec{F} — сумма внешних сил, действующих на систему (силы тяготения к Земле, сопротивления воздуха и др.).

Отсюда, пренебрегая бесконечно малой второго порядка $dM d\vec{v}$ и учитывая, что

$$\vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{u},$$

получим:

$$M d\vec{v} - dM \vec{u} = \vec{F} dt$$

или

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{u} dM}{dt} + \vec{F}. \quad (3.13)$$

Это уравнение изучалось И. В. Мещерским и носит его имя.

Мы видим, что движение ракеты, кроме внешних сил \vec{F} , обусловлено действием уходящих газов, которое определяется слагаемым, стоящим в правой части уравнения (3.13) и имеющим размерность силы. Это слагаемое часто называют реактивной силой.

Решение уравнения Мещерского в общем виде весьма сложно. Мы рассмотрим частный случай, когда действием внешних сил можно пренебречь ($\vec{F} = 0$) и считать начальную скорость ракеты (в момент $t = 0$, когда начинается сгорание топлива) равной нулю. Тогда движение происходит по прямой (скорости \vec{v} и \vec{u} противоположны), и уравнение (3.13) может быть записано в скалярном виде. При этом следует учесть, что в связи с ускоренным движе-

нием ракеты вектор \vec{dv} сонаправлен с вектором \vec{v} и, следовательно, противоположен \vec{u} . Поэтому

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{u dM}{dt}, \quad \text{где } u = |\vec{u}|. \quad (3.14)$$

При процессе горения, отрегулированном таким образом, чтобы скорость газов относительно ракеты была постоянной, получается важное для практики уравнение Циолковского:

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt}, \quad \text{где } u = \text{const}, \quad (3.15)$$

или после разделения переменных

$$-\frac{dM}{M} = \frac{dv}{u}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$-\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = \frac{1}{u} \int_0^v dv, \\ v = u \ln \frac{M_0}{M}, \quad (3.16)$$

т. е. скорость ракеты определяется оставшейся массой ракеты (M_0 — ее начальная масса).

Если M_p — масса несгораемой части ракеты, то наибольшая скорость, приобретаемая ракетой в момент окончания горения топлива, равна:

$$v = u \ln \frac{M_0}{M_p}.$$

В современной ракетной технике относительная скорость ракеты и уходящих газов достигает значения $5 \cdot 10^3$ м/с, а скорости, необходимые для запуска космических ракет (см. гл. 11), превышают 10^4 м/с. При этих условиях

$$\ln \frac{M_0}{M_p} = 2; \quad \frac{M_p}{M_0} = 0,14, \quad (3.17)$$

т. е. масса тела, выводимого на космическую орбиту, не превышает седьмой части начальной массы ракеты (вместе с топливом).

Действительные условия еще хуже, так как приходится преодолевать сопротивление воздуха и притяжение Земли. К. Э. Циолковский предложил уменьшать в полете M_p , сбрасывая ненужные детали конструкции по мере сгорания топлива. Именно это и делается в настоящее время: ракеты выполняются многоступенчатыми, и отдельные ступени после использования сбрасываются. Но даже современные ракеты могут вывести на околоземную орбиту спутник, масса которого не превышает нескольких процентов начальной массы ракеты.

Пользуясь уравнением (3.16), построим в функции аргумента $x = \frac{v}{u} = \ln \frac{M_0}{M}$ графики следующих величин:

1) скорости ракеты относительно Земли (в долях u):

$$y = \frac{v}{u} = x;$$

2) скорости газов относительно Земли (в долях u):

$$y = \frac{v-u}{u} = x-1;$$

3) кинетической энергии ракеты относительно Земли:

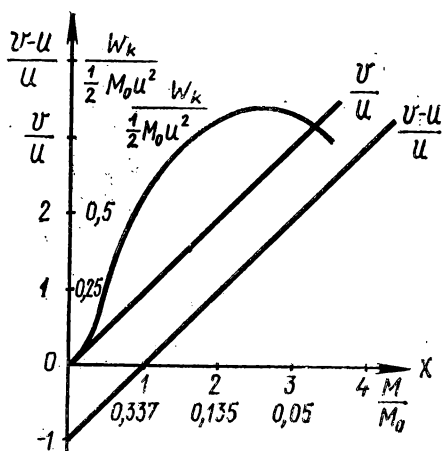


Рис. 3.2

$$y = W_k = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M_0 u^2 x^2 \exp(-x).$$

Соответствующие графики изображены на рисунке 3.2. Как видно из рисунка, когда скорость ракеты v становится больше u , скорость газов относительно Земли делается положительной, т. е. ракета и газы движутся относительно Земли в одну и ту же сторону.

Действительно, векторы \vec{v} и $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ при движении по прямой противоположны. При $v > 0$ $u < 0$, и скорость газов относительно Земли будет равна: $v_1 = v - |u|$. Она обращается в нуль при $v = |u|$. Пока скорость ракеты меньше скорости истекающих из нее газов ($v < |u|$), $v_1 < 0$ (газы движутся к Земле); когда $v > |u|$, то $v_1 > 0$ — газы и ракета движутся от Земли.

Кинетическая энергия ракеты максимальна при $x=2$, т. е. когда масса ракеты составляет $0,135 M_0$. Этот результат может показаться странным: ведь двигатель должен непрерывно ускорять ракету. Разумеется, так и происходит: скорость ракеты, как и кинетическая энергия единицы ее массы

$$W_1 = \frac{W_k}{M} = \frac{1}{2} u^2 x^2,$$

непрерывно растет по мере сгорания топлива.

3.3. ДИНАМИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Применим теперь законы механики для описания гармонического движения. Пусть

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Так как ускорение при гармоническом движении равно:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

то для поддержания движения необходимо действие переменной силы, направленной против смещения. Значение этой силы определяется произведением ускорения на массу движущегося тела:

$$F = m\ddot{x} = -m\omega^2 x = -kx. \quad (3.18)$$

Итак, чтобы сила вызывала гармонические колебания, она должна быть пропорциональна смещению. В случае пружинного маятника это есть сила упругости пружины, подчиняющаяся закону Гука. Ее называют *упругой силой*, а коэффициент $k = m\omega^2$ — *жесткостью* пружины.

В других случаях сила, оставаясь пропорциональной смещению, не является силой упругости; тогда ее называют «как бы упругой» (квазиупругой) силой.

Частота колебаний определяется массой тела и жесткостью:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (3.19)$$

Мгновенное значение кинетической энергии равно:

$$W_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

а потенциальной (для растянутой пружины):

$$W_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Полная энергия оказывается постоянной:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2.$$

В процессе колебаний кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно. Частота колебаний энергии вдвое больше частоты колебаний самой системы.

Колебания могут быть обеспечены не только пружиной. Так, математический маятник (материальная точка массой m на длинной нерастяжимой нити длиной L), если его вывести из положения равновесия, испытывает действие силы, возвращающей его в это положение (рис. 3.3) и равной:

$$F = -mg \sin \alpha$$

(знак «—» учитывает противонаправленность силы и смещения). При малых углах отклонения можно принять $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда $F = -mg \alpha$ и действующая на маятник сила оказывается пропорциональной угловому смещению (квазиупругой).

Так как углы отклонения малы, то дугу, описываемую маятником, можно заменить хордой, имеющей мгновенную длину $x = L\alpha$. Уравнение движения примет вид:

$$mL\ddot{\alpha} = -mg\alpha.$$

Его решением будет гармоническая функция

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

причем частота колебаний, равная:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

для математического маятника не зависит от массы. Постоянные α_m и φ_0 определяются начальными условиями (например, из значений смещения и скорости в момент $t=0$).

В нашем рассуждении мы пренебрегли неизбежным трением, вызывающим постепенное затухание колебаний. Его влияние будет учтено в главе 8.

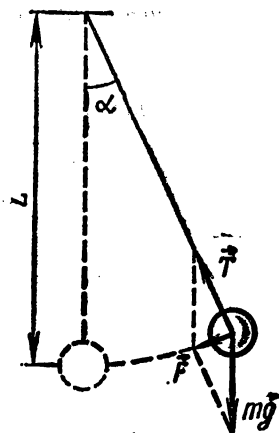


Рис. 3,3

3.4. ТРЕНИЕ

До сих пор, изучая различные движения, мы пренебрегали сопротивлением среды, окружающей движущееся тело. Теперь следует его учесть; однако при этом мы будем исследовать не физическую природу сил сопротивления, а только их проявление. Это связано с тем, что, несмотря на ясное происхождение трения (оно объяснено электромагнитным взаимодействием соприкасающихся при движении тел), строгое количественное рассмотрение сил трения является сложным и выходящим за пределы механики. Трение в конечном счете обязано сцеплению между поверхностями, поэтому оно существенно зависит от скорости относительного движения, состояния поверхностей, степени их прижатия, формы, среды и т. д. Здесь будет дано только приблизительное описание проявлений сил трения, которое необходимо для осмысленного использования уравнения движения в задачах, где трением нельзя пренебречь.

Жидкое трение. Силы сопротивления, возникающие при движении твердого тела в жидкости или газе, называются *силами жидкого трения*. Простой опыт с поплавком, на который можно воздействовать легким толчком (или просто подуть), позволяет установить важнейшие особенности этого трения:

а) поплавок приходит в движение (постепенно!) при сколько угодно слабом, но длительном воздействии на него;

б) если прекратить воздействие, то поплавок постепенно останавливается;

в) время установления движения (и время торможения) растёт при увеличении массы поплавка и зависит от его формы; от последней зависит и установившаяся скорость при постоянном воздействии.

Более тщательные опыты показывают, что при небольших скоростях (не более нескольких метров в секунду в жидкости или десятков метров в секунду в газе) сила жидкого трения пропорциональна скорости и антинаправлена ей:

$$\vec{F} = -r\vec{v}, \quad (3.20)$$

где r — коэффициент сопротивления, зависящий от состояния поверхности тела, его формы и природы жидкости.

Пусть некоторое тело массой m в момент $t=0$ (момент выключения двигателей, обеспечивавших движение) имело скорость \vec{V} . Каков закон его торможения? Второй закон Ньютона даёт (его можно писать в скалярной форме):

$$m \frac{dv}{dt} = -rv, \quad (3.21)$$

или после разделения переменных:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{r}{m} dt = -\frac{dt}{\tau},$$

где $\tau = \frac{m}{r}$ — характерное для системы время, называемое *временем установления (релаксации)*.

Интегрируя, получаем:

$$\int_v^V \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt, \\ v = V \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.22)$$

Таким образом, торможение тем сильнее, чем меньше масса и чем больше коэффициент сопротивления. График уравнения (3.22) показан на рисунке 3.4.

Если тело покоилось, а затем (в момент $t=0$) начала действовать постоянная сила \vec{F} , то уравнение движения (в этом случае его тоже можно записать в скалярной форме) таково:

$$m \frac{dv}{dt} = -rv + F. \quad (3.23)$$

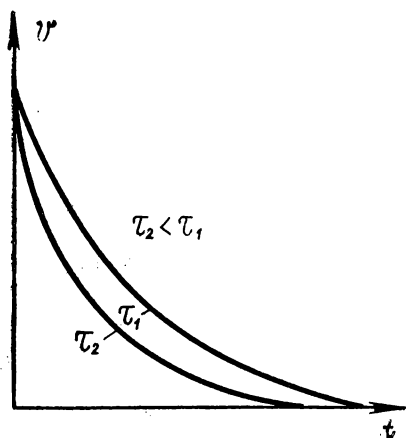


Рис. 3.4

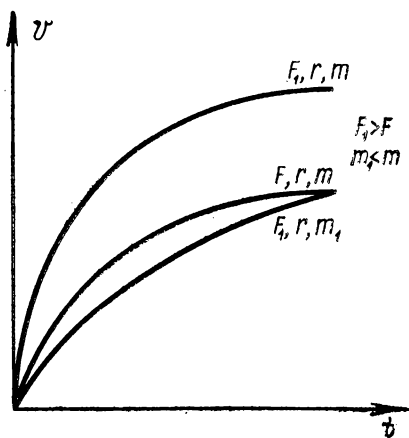


Рис. 3.5

Так как $F = \text{const}$, а сила трения растет со скоростью, то ускорение будет уменьшаться. Когда оно обратится в нуль, получится предельная «установившаяся» скорость:

$$V = \frac{F}{r}. \quad (3.24)$$

Можно показать (проверьте подстановкой), что установление скорости описывается уравнением:

$$v = \frac{F}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (3.25)$$

На рисунке 3.5 это уравнение изображено графически: верхняя и средняя кривые отвечают одной и той же системе, но $F_1 > F$. Верхняя и нижняя кривые отвечают одной и той же силе и одинаковому коэффициенту сопротивления; но масса тела во втором случае (нижняя кривая) меньше, чем в первом (верхняя кривая).

Весьма замечательно, что предельная скорость не зависит от массы, влияющей лишь на время установления движения.

Расчет коэффициента сопротивления сложен. Для шара радиусом ρ он был найден Стоксом:

$$r = 6\pi\eta\rho,$$

где η — коэффициент вязкости среды, окружающей шар. У воды при 20°C $\eta = 10^{-3}$ кг/(м·с). Для глицерина при 20°C $\eta = 0,85$ кг/(м·с). при 30°C $\eta = 0,35$ кг/(м·с); для воздуха при 20°C $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с).

У жидкостей вязкость с увеличением температуры уменьшается (вспомните плавление нагреваемого масла!), а у газов — растет. Это свидетельствует о различном характере молекулярного движения в жидкости и газе.

Форма тела и его ориентация по отношению к вектору скорости сильно влияют на коэффициент сопротивления. В этом легко убе-

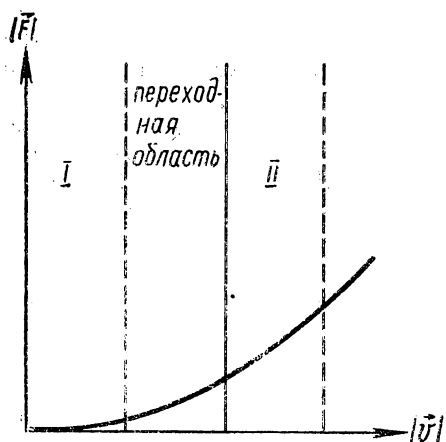


Рис. 3.6

чтобы парашют раскрылся, нужно время и значительная скорость падения, поэтому он неприменим при малых скоростях, т. е. при прыжках с малой высоты.

При больших скоростях сила сопротивления растет быстрее скорости (рис. 3.6): если в области I сила сопротивления пропорциональна скорости, то в области II она зависит от квадрата скорости, в дальнейшем она возрастает еще сильнее; при скоростях, приближающихся к скорости звука в газе, законы движения претерпевают качественные изменения.

Сухое трение при поступательном движении. Повседневный опыт учит, что для приведения в движение твердого тела, соприкасающегося с другим твердым телом, нужна сила, превышающая некоторое наименьшее значение F_{\min} . Если затем прекратить действие внешней силы, движение постепенно прекратится. Следовательно, трение существует и в первом и во втором случае. Его называют соответственно *трением покоя* и *трением скольжения*.

Пока тело не сдвинулось с места, развивается сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная против приложенной силы и равная ей по абсолютному значению. Однако $F_{\text{тр}}$ не может превзойти некоторого значения F_{\min} . Когда сила F станет больше F_{\min} , тело начнет двигаться в направлении \vec{F} , испытывая трение скольжения. Сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ направлена против скорости и практически не зависит от ее значения (пока трущиеся поверхности не нагреваются заметно).

Амонтон и Кулон показали экспериментально, что сила трения скольжения пропорциональна прижимающей силе, но не зависит от поверхности соприкосновения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu F_1 \frac{\vec{v}}{v}, \quad (3.26)$$

давая возможность листу бумаги падать (под действием притяжения Земли) при разных его положениях: 1) вертикальном, 2) горизонтальном, 3) в виде стрелки и 4) в виде комка неправильной формы.

Вообще говоря, сопротивление возрастает при увеличении сечения, перпендикулярного вектору скорости. Поэтому парашют снижает предельную скорость падения человека с опасного для жизни значения (около 50 м/с) до практически безопасного (3—5 м/с). Однако для того,

где F_1 — прижимающая сила, μ — коэффициент трения скольжения. Этот закон верен при неизменном состоянии соприкасающихся поверхностей, что трудно осуществить на практике; поэтому он выполняется не очень точно.

Коэффициент трения скольжения μ легко определить: тело кладут на наклонную плоскость и увеличивают угол наклона последней, пока не начнется скольжение. При этом (рис. 3.7), если соскальзывание начинается при угле наклона α , получается:

$$\begin{aligned} F_2 &= mg \sin \alpha = F_{\text{тр}} = \mu F_1 = \mu mg \cos \alpha; \\ \mu &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Обычно сила трения скольжения немного меньше, чем наибольшая сила трения покоя, но различие это невелико.

Законы сухого трения применимы для твердых поверхностей. На снегу, например, дело обстоит совершенно иначе: чтобы снег не проваливался под тяжестью лыжника, требуется уменьшать давление на снежный покров (поэтому-то лыжи и имеют большую поверхность соприкосновения со снегом). Смазка лыж нужна не столько для уменьшения трения, сколько для устранения возможного прилипания снега к лыжам.

Довольно широко распространено представление о вредности трения, так как для его преодоления приходится совершать работу. Однако это представление слишком односторонне: ведь при отсутствии трения мы не могли бы двигаться по горизонтальной поверхности, пуговицы не держались бы в петлях, чернила вытекали из ручек и т. д.

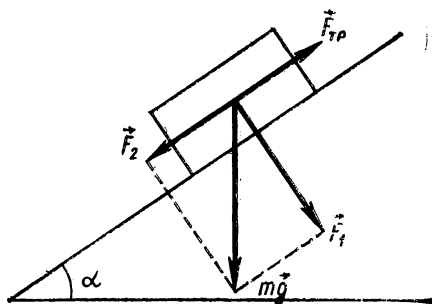


Рис. 3.7

3.5. ПРИМЕРЫ ИЗ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим несколько примеров на применение законов вращательного движения.

1. Для того чтобы тело могло обращаться вокруг некоторого центра, необходимо создать силу, способную сообщить телу центростреми-

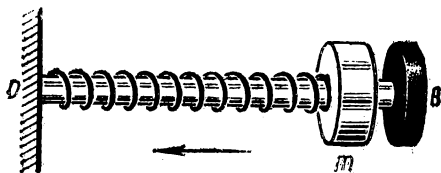


Рис. 3.8

тельное ускорение. Это хорошо видно на опыте с пружиной, один конец которой закреплен (точка O на рис. 3.8), а другой несет небольшое тело массой m , скользящее по твердому стержню.

В ненапряженном состоянии пружина занимает не более четверти длины стержня. Если, держа прибор в горизонтальном положении, привести его в поступательное движение в направлении стрелки, то сначала тело отстает от стержня; пружина растягивается и сообщает телу продольное ускорение, после чего относительное движение стержня и тела прекращается. При замедлении стержня пружина сжимается, при ускорении — растягивается.

Если же вращать стержень вокруг точки O в горизонтальной плоскости, то сначала тело удаляется от точки O , растягивая пружину. При медленном вращении, когда сила, необходимая для сообщения центростремительного ускорения,

$$F = -m\omega^2 R = -kx$$

невелика, пружина растягивается не очень сильно и тело движется вместе со стержнем, обращаясь вокруг точки O . Если увеличить угловую скорость вращения стержня, то пружина растягивается сильнее; в конце концов тело упирается в твердый ограничитель B , реакция которого обеспечивает (вместе с пружиной) необходимое центростремительное ускорение. При отсутствии ограничителя тело при больших скоростях вращения стержня слетает с него.

2. Магнитная составляющая силы Лоренца (см. уравнение 2.10) перпендикулярна скорости заряженного тела, поэтому при попадании заряженной частицы (заряд e , масса m) в магнитное поле с индукцией \vec{B}_x , перпендикулярной первоначальной скорости \vec{v} , частица начинает двигаться по окружности радиусом R , определяемым из условия:

$$F = evB_x = \frac{mv^2}{R}; \quad R = \frac{m}{e} \frac{v}{B_x}. \quad (3.28)$$

При этом время одного оборота, равное:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{eB_x}, \quad (3.29)$$

не зависит от скорости, так как разным скоростям отвечают разные радиусы окружностей. Эта особенность движения находит применение в некоторых типах ускорителей заряженных частиц (циклотронах).

3. Одним из устройств, позволяющих регистрировать траектории элементарных заряженных частиц, является камера Вильсона. Камеру можно поместить в магнитное поле с индукцией \vec{B} . Если частица влетит в камеру, имея скорость, нормальную к вектору индукции, то ее траектория искривится; по характеру искривления можно судить о скорости частицы и знаке ее заряда, что значительно расширяет сведения о зарегистрированной частице. На рисунке 3.9 показаны траектории положительной и отрицатель-

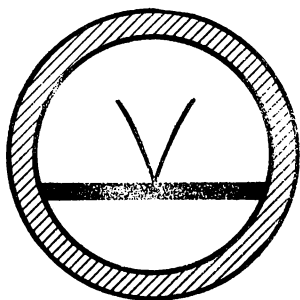


Рис. 3.9

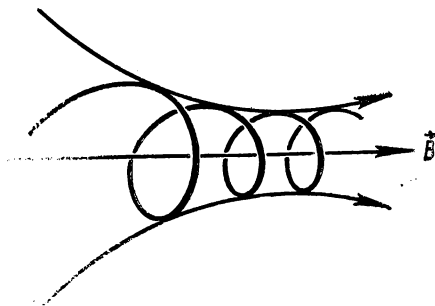


Рис. 3.10

ной частицы; они одновременно родились благодаря взаимодействию фотона с одним из атомов металлической пластины, перегораживающей камеру Вильсона.

Пусть скорость заряженной частицы \vec{v} составляет с направлением магнитной индукции угол α ; тогда проекция скорости на ось X , совпадающую по направлению с вектором \vec{B} , равная:

$$v_x = v \cos \alpha$$

(в этом направлении сила Лоренца отсутствует), меняться не будет. Искривление траектории зависит от проекции скорости на ось Y :

$$v_y = v \sin \alpha.$$

Поэтому частица будет описывать винтовую линию, перемещаясь (за время одного оборота) вдоль поля на

$$x = v_x T = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{eB_x}.$$

Допустим, что в начальной точке частицы имели скорости, направленные под малыми углами к оси X ($\cos \alpha \approx 1$), тогда все они после каждого оборота вновь будут сходиться практически в одной точке; на этом основан один из способов собирания (фокусировки) электронного пучка в вакуумных электронных приборах.

Если магнитное поле неоднородно, то при движении частицы в область более сильного поля точки пересечения траектории с осью сближаются и в область достаточно сильного поля частицы вообще не проникают (примерная траектория показана на рисунке 3.10). Достигнув области, где магнитная индукция достаточно велика, заряженная частица возвращается обратно.

Земля представляет собой гигантский магнит. Приходящие к Земле заряженные космические частицы, испытывая действие силы Лоренца, движутся сложным образом. В пространстве, окружающем Землю, образуются области, где заряженных частиц нет совсем, а также области их скопления. Вместе с частицами, рождающимися при ионизации молекул атмосферных газов солнечным излучением и другими причинами, космические частицы образуют вокруг Земли слои с повышенной концентрацией заря-

женных частиц, оказывающие существенное влияние на условия радиосвязи.

Подчеркнем в заключение, что так как магнитная составляющая силы Лоренца всегда перпендикулярна скорости, частицы, движущиеся в магнитном поле, не меняют своей кинетической энергии, но лишь изменяют направление скорости движения, поэтому работа магнитной составляющей силы Лоренца всегда равняется нулю.

3.6. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ТРУБКЕ

Приведем еще один пример применения законов механики для описания движения электронов в электронно-лучевой трубке, представляющей основу таких приборов, как уже неоднократно упоминавшийся осциллограф, телевизор, и многих других.

Электронно-лучевая трубка осциллографа — это стеклянный баллон, имеющий узкое горло, постепенно расширяющееся к торцу, служащему экраном. В узкой части расположен накаливаемый катод K , являющийся источником электронов, и диафрагма с узким отверстием A , называемая анодом (рис. 3.11). Далее расположены два плоских конденсатора $C1$ и $C2$, причем их пластины лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Торец колбы покрыт изнутри веществом, светящимся при попадании на него быстрых электронов. Воздух из колбы выкачан, так что оставшиеся молекулы не препятствуют движению электронов в трубке.

Между катодом и анодом создается электростатическое поле, сообщающее электронам, вылетающим из катода с малыми скоростями (мы ими пренебрежем), значительную кинетическую энергию, равную:

$$\frac{mv_x^2}{2} = \int_0^l e \vec{E} \cdot d\vec{l} = eU_a,$$

где e , m и v_x — соответственно заряд, масса и скорость электрона, \vec{E} — напряженность ускоряющего поля в точках траектории, описываемой электроном, $d\vec{l}$ — элементарное перемещение на пути от катода к аноду.

Разность потенциалов между катодом и анодом

$$U_a = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

не зависит (как это будет показано в главе 11) от формы траекторий, поэтому все электроны приобретают практически одну и ту же кинетическую энергию.

Узкое отверстие в аноде вырезает из пучка электронов узкий «луч», идущий практически вдоль оси трубки. Дальше электроны движутся по инерции и попадают в конденсатор $C1$. В конденсаторе можно создать электрическое поле, перпендикулярное скорости

электронов \vec{v}_x . Оно практически однородно внутри конденсатора и исчезает за его пределами. Обозначим напряженность этого поля \vec{E}_y . В этом поле электроны получают ускорение

$$\vec{a}_y = \frac{e}{m} \vec{E}_y,$$

перпендикулярное первоначальной скорости электронов \vec{v}_x .

Пусть длина пластин равна l_1 (рис. 3.12). Это расстояние электроны пролетают за время

$$t = \frac{l_1}{v_x}$$

и успевают отклониться в направлении оси Y на отрезок

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{l_1^2}{v_x^2} E_y,$$

приобретая скорость

$$v_y = a_y t = \frac{e}{m} \frac{l_1}{v_x} E_y.$$

Внутри конденсатора электроны движутся по параболе (§ 1.6); за пределами поля они движутся прямолинейно, причем линия их движения образует с осью X угол, определяемый соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{e}{m} \frac{l_1}{v_x^2} E_y = \frac{l_1 E_y}{2U_a}.$$

Поэтому, двигаясь к экрану, лежащему в плоскости YO_1Z , электроны дополнительно сместятся на отрезок

$$y_2 = L \operatorname{tg} \alpha.$$

На экране они попадут в точку, имеющую координаты:

$$z = 0; \quad y = y_1 + y_2 = y_1 + L \operatorname{tg} \alpha = \frac{l_1^2}{4U_a} \left(1 + 2 \frac{L}{l_1} \right) E_y. \quad (3.30)$$

Итак, отклонение по оси Y пропорционально напряженности E_y поля конденсатора $C1$.

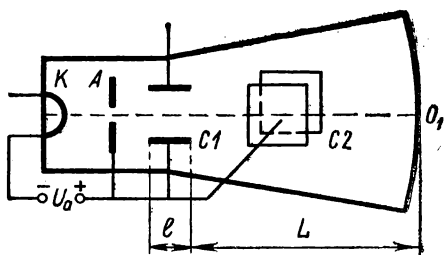


Рис. 3.11

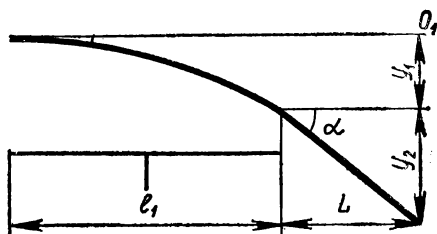


Рис. 3.12

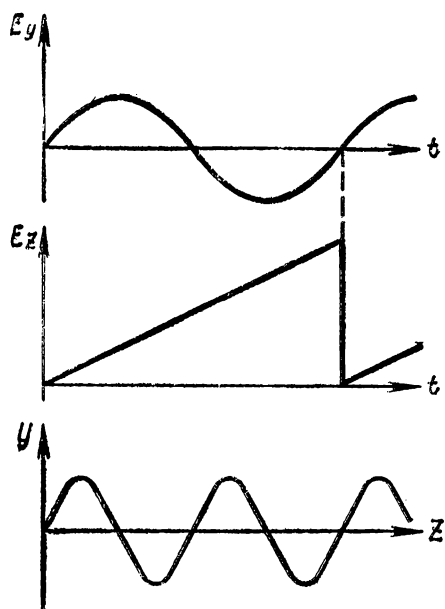


Рис. 3.13

Во втором конденсаторе поле направлено по оси Z ; электроны испытывают отклонение z , пропорциональное E_z .

При использовании трубки в осциллографе в конденсаторе $C1$ создается поле напряженностью E_y , зависимость которого от времени нужно исследовать. В конденсаторе $C2$ создается поле, напряженность которого медленно нарастает пропорционально времени и быстро уменьшается до нуля (оба процесса периодические), как это показано на рисунке 3.13.

Если период изменений напряженности E_z равен или кратен периоду изменений напряженности E_y , то повторные траектории электронного

пучка на экране будут налагаться друг на друга и глаз воспримет неподвижную кривую

$$y=f(z)=f(t),$$

так как z пропорционально времени (см. рис. 3.13).

Но отклонение y , как видно из уравнения (3.30), пропорционально E_y . Поэтому $E_y=f(t)$, т. е. кривая на экране представляет временную зависимость напряженности E_y , которая нас и интересует.

Рассмотренный процесс получения на экране кривой $E_y=f(t)$ называют временной разверткой, а поле напряженностью E_z — развертывающим полем.

Мы не рассматриваем здесь технических усовершенствований, делающих работу осциллографа весьма гибкой и надежной. В частности, осциллографы могут применяться и при изучении однократных (непериодических) процессов.

Сначала осциллографы применялись только в электродинамике для изучения электрических процессов. Впоследствии был создан ряд устройств, позволяющих получить электрические напряжения, пропорциональные тем или иным неэлектрическим величинам (например, микрофон позволяет получить электрическое напряжение, пропорциональное звуковому давлению на мембрану микрофона). Подобные устройства часто называют датчиками. Подавая напряжение от датчика на пластины конденсатора $C1$ (в конденсаторе

тем самым создается электрическое поле с напряженностью, пропорциональной этому напряжению), мы получаем возможность контролировать при помощи осциллографа процессы неэлектрической природы, воспринимаемые датчиком.

Так как масса электрона весьма мала ($9,1 \cdot 10^{-31}$ кг), то осциллограф является практически безынерционным прибором, позволяющим исследовать весьма быстропротекающие процессы.

Электронный луч в электронно-лучевой трубке можно смещать не только электростатическим, но и магнитным полем, создаваемым катушками с токами. В этом случае управление лучом происходит под действием магнитной составляющей силы Лоренца. Такой способ применяется, в частности, в трубках телевизоров.

**4.1. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ**

До сих пор мы изучали динамику точки, а также поступательное движение твердого тела, полностью описываемое движением любой его точки.

Теперь рассмотрим динамику твердого тела, и прежде всего его вращение, причем будем предполагать, что при вращении заметных деформаций тела не происходит. Вращательное движение тела важно не только в связи с его распространенностью, но и потому, что в соответствии с принципом независимости движений любое произвольное движение твердого тела может быть представлено совокупностью вращения относительно центра масс и поступательного движения этой точки.

В самом общем случае твердое тело может вращаться вокруг неподвижной точки; при этом его движение можно свести к трем независимым вращениям вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через точку. Однако эта задача очень сложна, и мы ограничимся рассмотрением вращения тела вокруг одной оси. Ось может быть неподвижна (например, ось ротора электрической машины, смонтированной в машинном зале); возможно также перемещение оси в пространстве, — например, ось вращения колеса, катящегося по шоссе, в каждый момент совпадает с линией соприкосновения колеса с шоссе (мгновенная ось); наконец, ось может быть свободной (например, у колеса, скатившегося с наклонной плоскости и падающего в воздухе, ось вращения, проходящая через центр масс, движется вместе с колесом).

Во всех случаях прежде всего бросается в глаза устойчивость, приобретаемая телом при вращении. Так, металлический диск (например, монету) трудно поставить на ребро, чтобы при этом он стоял устойчиво; но если закрутить его вокруг вертикального диаметра, он приобретает значительную устойчивость. Кольцо из легкой металлической цепочки, поставленное на стол, тотчас же падает, принимая неправильную форму. Но если раскрутить его на шкиве двигателя, имеющего горизонтальную ось вращения, и осторожно стянуть со шкива, действуя силой, направленной вдоль оси шкива, то оно бежит по столу и даже поднимается по наклонной плоскости подобно твердому кольцу.

Обобщая результаты наблюдений, можно заключить, что тело,

вращающееся вокруг оси, проходящей через центр масс, если оно освобождено от внешних воздействий, должно сохранять вращение неопределенно долго. Это заключение аналогично первому закону Ньютона для поступательного движения (центр масс тела в рассмотренном случае либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно, так что полный механический импульс тела не изменяется).

Вращение отдельных точек (т. е. их ускоренное движение) обеспечивается при этом внутренними силами, возникающими при деформациях тела (хотя мы ими и пренебрегаем, считая, что форма тела сохраняется при его вращении, но в действительности деформации имеются).

Внешние воздействия изменяют состояние движения. Это легко показать, пользуясь крестовиной, на горизонтальной оси которой имеются два шкива разных радиусов (рис. 4.1). На крестовине укреплены симметрично расположенные грузы массами M_i . Наматываем на малый шкив нить, перебросим ее через блок B и подвесим на ней тело массой m . Сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ будет натягивать нить. Если эта сила мала, то трение покоя (в опорах оси вращения) не будет преодолено и вращения не возникнет. Увеличивая массу m , можно добиться возникновения ускоренного движения крестовины. Меняя массу m , можно убедиться, что ускорение увеличивается с ростом силы F . Изменение расстояния от крестовины до блока на значении ускорения не сказывается. Это наблюдение соответствует общему положению о допустимости переноса точки приложения силы, действующей на твердое тело, по линии ее действия без изменения результатов воздействия на тело.

Меняя положения грузов массами M_i (при заданной силе), можно убедиться, что ускорение при этом изменяется: оно уменьшается, если массы удаляются от оси вращения. Наконец, если данная сила вместо малого шкива будет действовать на большой, то ускорение возрастает. Таким образом, результатом действия внешней силы на тело, имеющее неподвижную ось вращения, является ускоренное вращательное движение тела (второй закон Ньютона).

Но результат действия силы зависит не только от силы и массы приводимого в движение тела, но и от того, где находится точка приложения силы и как распределены массы в теле. Для количественного описания наблюдавшихся эффектов удобно ввести некоторые новые механические понятия и сформулировать второй закон Ньютона в этих понятиях.

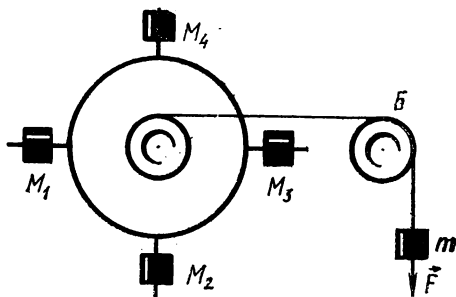


Рис. 4.1

Начнем с оценки кинетической энергии вращающегося тела. Отдельные элементы его (массами dm_i) движутся с различными линейными скоростями \vec{v}_i ; но угловая скорость ω у всех элементов тела одинакова. Обозначим расстояние элемента от оси вращения r_i . Полная кинетическая энергия вращающегося тела равна:

$$W_k = \frac{1}{2} \int v_i^2 dm_i = \frac{\omega^2}{2} \int r_i^2 dm_i = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (4.1)$$

где

$$I = \int r_i^2 dm_i \quad (4.2)$$

есть величина, зависящая от распределения масс относительно оси вращения. Эту величину называют *моментом инерции* тела относительно данной оси. Она равна арифметической сумме элементарных моментов инерции относительно той же оси $dI = r_i^2 dm_i$. Единицей измерения момента инерции в СИ служит к и л о г р а м м - м е т р в к в а д р а т е.

Так как число возможных осей вращения неопределенно велико, то таково же и число моментов инерции, причем ни один из них не может равняться нулю, так как все элементарные моменты положительны.

Моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс, называются *главными моментами инерции*. Если тело симметрично, то оси проводят параллельно осям симметрии. Главные моменты инерции находятся методами интегрального исчисления. Например, момент инерции тонкостенного кругового цилиндра (радиус R , толщина стенок $d \ll R$, масса M) относительно его геометрической оси равен:

$$I_0 = MR^2.$$

Момент инерции сплошного кругового цилиндра радиусом R и массой M относительно такой же оси равен:

$$I_0 = \frac{1}{2} MR^2.$$

Значения главных моментов инерции для многих симметричных тел приводятся в справочниках, поэтому можно пользоваться готовыми формулами. Так, если ось вращения перпендикулярна оси симметрии цилиндра и проходит через центр масс, то (независимо от формы сечений) момент инерции равен:

$$I_0 = \frac{1}{12} Mh^2,$$

где h — высота цилиндра.

Наконец, для шара момент инерции относительно любого диаметра равен:

$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2,$$

где R — радиус, M — масса шара.

Если ось вращения не проходит через центр масс, то момент инерции I относительно этой оси будет больше, чем момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно первой оси. Оба момента связаны простой зависимостью; найдем ее. На рисунке 4.2 показано сечение вращающегося тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр масс C , удаленный от оси вращения O_1 на расстояние a . Вращение вокруг оси O_1 можно рассматривать, как вращение вокруг оси C и одновременное вращение центра масс вокруг оси O_1 со скоростью V .

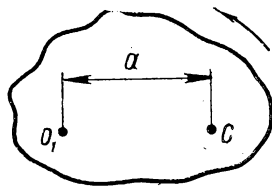


Рис. 4.2

Оба вращения происходят с одной и той же угловой скоростью. Поэтому для кинетической энергии тела имеем:

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M a^2 \omega^2,$$

где M — масса тела. Отсюда получаем соотношение, называемое теоремой Штейнера:

$$I = I_0 + M a^2. \quad (4.3)$$

4.2. МОМЕНТ СИЛЫ. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Внешняя сила, как мы видели, может изменить движение тела. Пусть твердое тело имеет неподвижную ось вращения, и пусть к нему приложена произвольная сила \vec{F}_1 . Разложим силу \vec{F}_1 на две составляющие \vec{F}_\parallel и \vec{F} :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_\parallel + \vec{F},$$

где \vec{F} лежит в плоскости вращения, а \vec{F}_\parallel — параллельна оси (рис. 4.3, а). Сила \vec{F}_\parallel не может вызвать вращения вокруг оси, а только будет создавать давление на подшипники и изгибать ось; однако, мы будем считать ось достаточно прочной и пренебрежем возможным изгибом; поэтому с силой \vec{F}_\parallel можно не считаться.

Силу \vec{F} , в свою очередь, разложим на две: \vec{F}_2 , действующую вдоль радиус-вектора \vec{R} , и \vec{F}_3 , перпендикулярную ему (рис. 4.3, б). Сила \vec{F}_3 будет изгибать ось, но вращения не создаст; она для нас интереса не представляет. Сила \vec{F}_2 , модуль которой равен:

$$F_2 = F \sin \beta,$$

будет создавать вращение, сообщая телу ускорение.

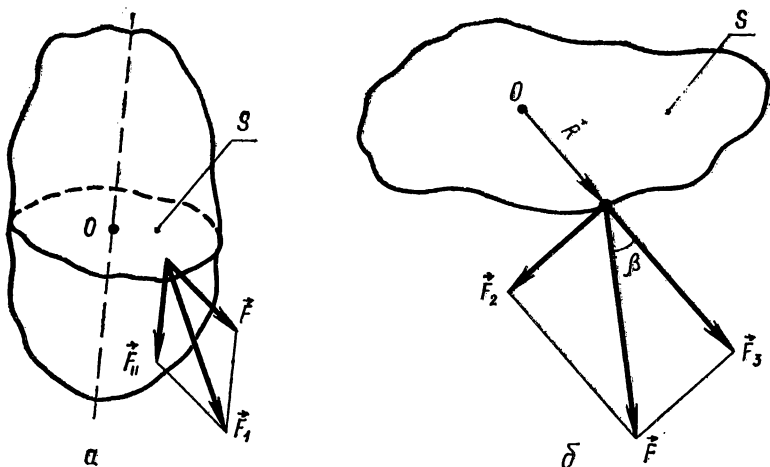


Рис. 4.3

Действуя на малом перемещении $ds = R d\varphi = R \omega dt$ ($d\varphi$ — угловое смещение), эта сила совершит работу:

$$dA = F_2 ds = R F_2 \omega dt, \quad (4.4)$$

в результате чего кинетическая энергия получит приращение:

$$dW_k = I \omega d\omega = dA.$$

Из последних двух соотношений находим:

$$I \frac{d\omega}{dt} = R F_2.$$

Но $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$ есть угловое ускорение тела. Таким образом,

$$I \alpha = R F_2 = R F \sin \beta.$$

Мы представляли угловое ускорение вектором, параллельным оси вращения. Так как правая часть равенства есть модуль векторного произведения $[\vec{R}\vec{F}]$, то, выбрав указанный порядок умножения, мы получим вектор \vec{M} , параллельный $\vec{\alpha}$:

$$\vec{M} = [\vec{R}\vec{F}]. \quad (4.5)$$

Величина M называется *моментом силы* \vec{F} относительно оси вращения; в СИ ее измеряют в ньютонах (Н·м).

Учитывая написанные ранее уравнения, установим в векторной форме связь между угловым ускорением и моментом внешней силы:

$$I \vec{\alpha} = \vec{M}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) показывает, что момент силы равен произведению момента инерции на сообщаемое силой угловое ускорение. Это уравнение подобно уравнению для поступательного движения:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (4.7)$$

и выражает, как и последнее, второй закон Ньютона.

В динамике материальной точки уравнение (4.7) было обобщено путем введения понятия механического импульса и приведено к виду:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Подобное же обобщение может быть сделано и в случае вращательного движения. Преобразуя выражение (4.6), получаем:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} (I\vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Величина $\vec{L} = I\vec{\omega}$ называется *моментом механического импульса*. Это название объясняется тем, что \vec{L} можно представить следующим образом:

$$\vec{L} = \int dm_i R_i^2 \vec{\omega} = \int [\vec{R}_i [dm_i \vec{R}_i \vec{\omega}]] = \int [\vec{R}_i [dm_i \vec{v}_i]] = \int [\vec{R}_i d\vec{p}_i], \quad (4.8)$$

где \vec{v}_i — линейные скорости элементарных масс dm_i , $d\vec{p}_i$ и R_i — соответственно их импульсы и расстояния от оси вращения. Все векторные произведения подынтегрального выражения направлены по вектору угловой скорости.

Вводя \vec{L} в уравнение (4.6), получаем обобщенное уравнение движения вращающегося тела:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = [\vec{R}\vec{F}]. \quad (4.9)$$

Итак, момент внешних сил изменяет момент механического импульса во времени.

Уравнение (4.4) определяло элементарную работу силы \vec{F} . Очевидно, также выражается работа силы \vec{F} . Развиваемая при этом мощность равна:

$$N = \frac{dA}{dt} = RF\omega.$$

Но RF — модуль вращающего момента \vec{M} , который параллелен вектору угловой скорости $\vec{\omega}$. Поэтому мощность в общем случае

может быть записана в виде скалярного произведения векторов \vec{M} и $\vec{\omega}$:

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}.$$

Явления, рассмотренные в начале главы (например, опыты с крестовиной), полностью описываются полученными уравнениями.

4.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

В замкнутой системе момент внешних сил отсутствует, и из уравнения (4.9) следует, что

$$\vec{L} = \text{const.}$$

Это важное соотношение выражает третий закон сохранения в механике — сохранение момента механического импульса. Его можно проверить на опыте с маломощным электродвигателем, подвешенным на длинных тонких нитях. Ось вращения удобно расположить вертикально, тогда влияние нитей (по крайней мере, в начале вращения) будет мало; нити могут служить токоподводящими проводами.

Двигатель подключают к электрической сети, зажав в руке его статор (внешнюю часть), при этом ротор приходит во вращение. Когда зажимают ротор, захватывая выходящую наружу ось, во вращение приходит статор, причем в направлении, противоположном направлению вращения ротора.

Если не вмешиваться в движение двигателя, то статор и ротор одновременно вращаются в противоположные стороны. Наконец, если закрепить ротор относительно статора при помощи стопорного винта, двигатель остается в покое.

Первые три части опыта доказывают, что момент внутренних сил (взаимодействие токов в обмотках двигателя) сообщает частям системы моменты импульса разных знаков. Заключительная часть опыта позволяет проверить закон сохранения момента импульса количественно (в начале опыта он был равен нулю).

При поступательном движении системы внутренние силы не могут изменить ни импульса системы, ни ее массы, поэтому скорость центра масс остается неизменной. При вращательном движении внутренние силы могут изменить распределение масс (и, значит, момент инерции относительно оси вращения). Следствием этого должно быть изменение угловой скорости вращения. Проверку этого интересного вывода удобно провести на «скамье Жуковского» — скамейке, могущей вращаться (без заметного трения) вокруг вертикальной оси.

Экспериментатор садится на скамейку, держа в вытянутых руках гири (3—5 кг), увеличивающие его момент инерции. Ему сооб-

щают извне момент механического импульса, приведя скамейку во вращение с небольшой угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, при этом

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega}_1,$$

где I_1 — момент инерции экспериментатора (вместе со скамейкой и грузами).

Затем он прижимает руки к туловищу, уменьшая момент инерции (за счет действия внутренних сил, неспособных изменить момент импульса). Опыт показывает, что это приводит к заметному возрастанию угловой скорости, что согласуется с законом сохранения момента импульса, так как должно быть:

$$I_1 \vec{\omega}_1 = I_2 \vec{\omega}_2.$$

Если снова развести руки, угловая скорость уменьшается.

Затем экспериментатору, сидящему на неподвижной скамейке, подают велосипедное колесо, приведенное во вращение вокруг вертикальной оси. Экспериментатор берет колесо за два конца оси (по обе стороны колеса), по возможности совмещая ось колеса с осью скамейки. Скамейка по-прежнему остается неподвижной, так как внешние силы сообщили момент импульса только части системы «экспериментатор — колесо». Теперь экспериментатор поворачивает колесо на 180° вокруг горизонтальной оси (это требует значительного усилия, так как обычно колесо для увеличения его момента инерции утяжеляют слоем металла, расположенным по периферии колеса). При этом экспериментатор (его момент инерции I_2) приходит во вращение, причем его угловая скорость $\vec{\omega}_2$ совпадает по направлению с первоначальной угловой скоростью колеса, что отвечает закону сохранения момента импульса:

$$I_1 \vec{\omega}_1 = -I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2,$$

где $I_1 \vec{\omega}_1$ — первоначальный момент импульса колеса; $-I_1 \vec{\omega}_1$ — окончательный момент импульса колеса, $I_2 \vec{\omega}_2$ — момент импульса экспериментатора.

Наконец, если дать неподвижному экспериментатору неподвижное колесо и он приведет его во вращение, то сам он (вместе со скамейкой) приходит во вращение в противоположную сторону.

Закон сохранения момента механического импульса был сформулирован нами и проиллюстрирован примерами для тел, сохраняющих при движении ось вращения неподвижной. Можно показать, что он строго выполняется и для случая произвольного вращения в замкнутой системе.

Как и законы сохранения механического импульса и механической энергии, закон сохранения момента импульса обобщается на круг явлений, выходящих за пределы классической механики, например, применительно к атомным, электромагнитным процессам и др.

Закон сохранения момента импульса — фундаментальный закон природы. В курсе теоретической физики показывается, что он в конечном счете связан с изотропностью пространства. В общем виде этот закон, как и остальные законы сохранения, не является прямым следствием законов механики, а должен рассматриваться как самостоятельный постулат.

4.4. МГНОВЕННЫЕ ОСИ ВРАЩЕНИЯ

В § 4.1 мы приводили пример с цепочкой, бегущей по столу и проявляющей динамическую устойчивость. При своем движении цепочка в каждый момент вращается вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией касания цепочки со столом. Мгновенная ось сама перемещается в пространстве.

Движение цепочки (допустим, что оно происходит без скольжения) можно рассматривать как сумму двух движений — поступательного движения центра масс со скоростью v и вращения цепочки вокруг ее центра масс с угловой скоростью:

$$\omega = \frac{v}{R},$$

где R — радиус окружности, образованной цепочкой. Действительно, как видно из рисунка 4.4, линейные скорости точек окружности меняются от $2v$ до нуля (в точке A , отвечающей мгновенной оси). Рисунок позволяет понять, почему крылья автомобилей с внутренней стороны забрызгиваются грязью: отрывающиеся от колес частицы грязи имеют некоторую скорость относительно машины, причем для частиц, отрывающихся от верхней части колеса, эта скорость направлена вперед.

Аналогично можно объяснить и такой простой опыт. С наклонной плоскости под действием силы тяжести скатываются два цилиндра одинакового радиуса, одинаковой массы, но с различными моментами инерции (один из цилиндров полый и сделан из более плотного материала — он имеет больший момент инерции, другой цилиндр сплошной). Опыт показывает, что быстрее скатывается цилиндр с меньшим моментом инерции (сплошной). Действительно, работа силы тяжести в обоих случаях одинакова, так как центр тяжести обоих цилиндров опускается одинаково, если они скатываются с одной наклонной плоскости. За счет этой работы получается кинетическая энергия:

$$W_k = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Но так как $v = \omega R$, то

$$W_k = \frac{\omega^2}{2} (MR^2 + I).$$

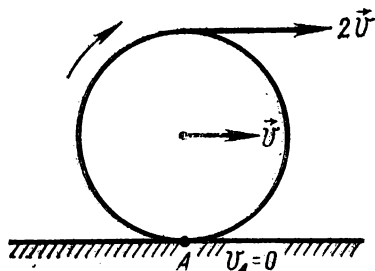


Рис. 4.4

Отсюда следует, что большему моменту инерции отвечает меньшая угловая (а значит, и линейная) скорость.

Понятие о мгновенных осях позволяет разобраться и в изящном опыте с «капризной катушкой». Упавшая на пол катушка ниток откатывается еще дальше, если потянуть за нитку, образующую с полом угол α (рис. 4.5). Если же

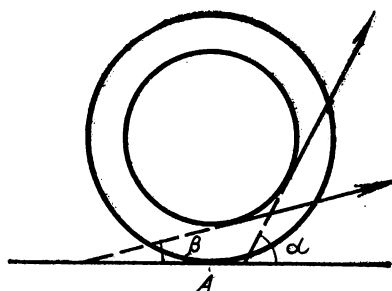


Рис. 4.5

сообщить нитке наклон под углом $\beta < \alpha$, то катушка послушно катится к вам в руки. Дело в том, что в обоих случаях возникает вращение вокруг мгновенной оси A , нормальной к плоскости рисунка. В первом случае создается момент, вызывающий вращение против часовой стрелки, и катушка откатывается; во втором случае момент создаёт вращение по часовой стрелке и катушка приближается к экспериментатору.

Кроме мгновенных осей, образованных соприкасающимися телами, возможны и свободные оси. Так, если подбросить коробку спичек, одновременно сообщив ей вращение вокруг оси, проходящей через центр масс (для этой оси момент инерции должен быть наибольшим), то коробка устойчиво вращается, перемещаясь в то же время поступательно. При этом мгновенная ось вращения является свободной: она не соприкасается с какими-либо телами (роль воздуха в этом опыте отрицательна: он тормозит движение; опыт превосходно удался бы и в вакууме). Интересно отметить, что легче всего получить устойчивое вращение вокруг свободной оси с наибольшим моментом инерции, труднее — с наименьшим и практически невозможно заставить тело устойчиво вращаться вокруг свободной оси с моментом инерции, имеющим среднее значение.

Для изучения общего случая вращения тела вокруг неподвижной точки применяют такие же методы, что и для вращения вокруг оси. При этом вводят понятие момента силы \vec{F} относительно неподвижной точки:

$$\vec{M} = [\vec{R}\vec{F}],$$

где \vec{R} — радиус-вектор, проведенный из неподвижной точки к точке приложения силы. Этот момент можно рассматривать как векторную сумму трех моментов относительно трех взаимно перпендикулярных осей вращения, проходящих через неподвижную точку.

Так как моменты инерции тела относительно различных осей, вообще говоря, отличаются друг от друга, то получающиеся уравнения движения решаются обычно довольно сложно.

Свободное твердое тело может совершать три независимых поступательных движения (относительно трех координатных взаим-

но перпендикулярных осей) и три независимых вращения (относительно трех главных осей). Следовательно, оно обладает шестью степенями свободы. Такое движение весьма сложно, и мы не будем его изучать.

4.5. ГИРОСКОПЫ

Значительный практический интерес представляют быстро вращающиеся волчки (*гироскопы*). В их странном (на первый взгляд) поведении под действием внешних сил позволяют разобраться законы динамики.

Волчок обладает большой динамической устойчивостью; в этом можно убедиться, проведя опыт с волчком, помещенным в кардановом подвесе (рис. 4.6).

Гироскоп (тяжелый диск) может вращаться с малым трением вокруг оси AA . Подшипники этой оси закреплены в кольце B , которое само способно вращаться вокруг оси CC , перпендикулярной оси волчка. Подшипники оси CC закреплены в полукольце D , способном вращаться вокруг оси E , опирающейся на неподвижный подшипник, расположенный в нижней части трубки T . Все три оси пересекаются в центре масс диска. Таким образом диск оказывается как бы подвешенным в своем центре масс, а потому действие силы тяжести на гироскоп полностью уравновешено.

Если, взяв трубку T в руку, поворачивать прибор в разных направлениях, то ось AA гироскопа (даже не вращающегося) практически не будет менять своего положения в пространстве. Но даже при слабых воздействиях на кольцо подвеса гироскоп легко поворачивается вокруг осей CC или E . Если же гироскоп приведен в быстрое вращение вокруг оси AA , то кратковремен-

ные довольно сильные воздействия на кольца почти не изменяют положения оси гироскопа. Объясняется это тем, что вращающийся гироскоп имеет большой момент импульса $I\vec{\omega}$, направленный вдоль оси AA . Кратковременное воздействие на одно из колец (B, D) создает лишь небольшой прирост момента импульса $\vec{M}\Delta t$ (\vec{M} — момент силы, Δt — время ее действия); поэтому полный момент импульса почти не изменяется. Эта динамическая устойчивость — одна из характернейших особенностей гироскопа.

Влияние длительно действующего внешнего момента удобнее наблюдать на другой конструкции гироскопа

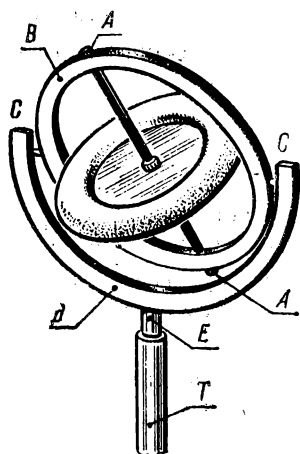


Рис. 4.6

(рис. 4.7). Ось X волчка может вращаться вокруг вертикальной оси Y и горизонтальной Z ; все оси пересекаются в опоре волчка.

Пусть сначала волчок уравновешен телом массой m . При закручивании волчка его ось остается неподвижной в пространстве, так как момент механического импульса

$$\vec{L}_x = I_x \vec{\omega}_x$$

постоянен.

Нарушим равновесие, сместив тело вправо (или подвесив около него дополнительное тело малой массы). Появившийся вращающий момент \vec{M}_z , казалось бы, должен повернуть волчок вокруг оси Z . Однако опыт показывает, что волчок приходит во вращение вокруг оси Y .

Конечно, никакого противоречия законам механики здесь нет. Под действием вращающего момента волчок приобретает добавочный момент импульса

$$\Delta \vec{L}_z = \vec{M}_z \Delta t.$$

Этот момент векторно складывается с первоначальным моментом \vec{L}_x (см. рис. 4.7). Вектор суммарного момента \vec{L}_1 поворачивается относительно вектора \vec{L}_x на угол

$$\Delta \alpha = \Omega_y \Delta t$$

(вокруг вертикальной оси), где Ω_y — угловая скорость этого вращения, называемого *прецессией*. Следовательно, поворачивается и весь волчок, а с ним и векторы \vec{L}_x и \vec{L}_z . Поэтому прецессия происходит непрерывно. Направление вращения зависит от направлений $\vec{\omega}_x$ и \vec{M}_z .

За малый промежуток времени Δt вектор успеет повернуться на малый угол. Тогда из векторной диаграммы получаем:

$$\frac{\Delta L_z}{L_x} = \frac{M_z \Delta t}{I_x \omega_x} = \operatorname{tg} \Delta \alpha \approx \Delta \alpha = \Omega_y \Delta t.$$

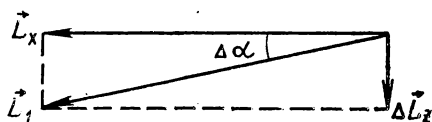
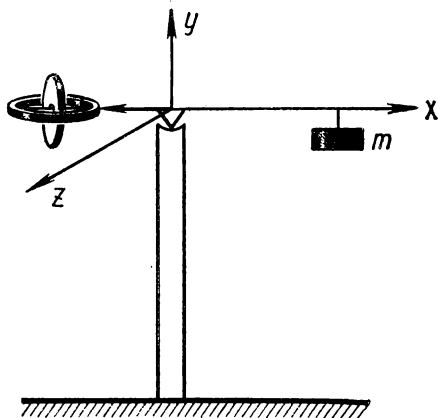


Рис. 4.7

Поэтому угловая скорость прецессии оказывается равной:

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{M_z}{I_x \omega_x}. \quad (4.10)$$

При отсутствии трения прецессия продолжалась бы бесконечно долго. Реальный волчок, движущийся с трением, постепенно уменьшает свою угловую скорость, и его ось приближается к вертикали, совпадающей с направлением действующего внешнего момента силы \vec{M}_z . Если прекратить внешнее воздействие, то прецессия мгновенно прекращается, так как перестает меняться момент импульса.

В теории магнетизма мы встретимся с волчками атомного размера.

4.6. МАЯТНИКИ

Законы динамики твердого тела применимы и при изучении движения маятников. Маятником (в широком смысле слова) называют тело, которое способно колебаться около своего положения равновесия под действием тех или иных сил.

Колебания пружинного маятника, при котором тело совершает поступательное движение, были рассмотрены в § 3.3. Там мы учитывали лишь продольную деформацию пружины (рис. 4.8, а). Но возможны и крутильные колебания, когда решающую роль играет закручивание нити подвеса, а ее продольной деформацией можно пренебречь. Так, симметричное тело (диск, гантель), подвешенное на тонкой нити, представляет собой крутильный маятник (рис. 4.8, б). Если повернуть его в горизонтальной плоскости на угол α , то в закручивающейся нити подвеса возникнут силы, возвращающие тело в начальное положение. При небольших углах закручивания момент

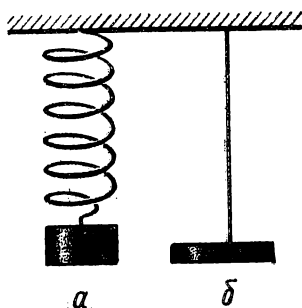


Рис. 4.8

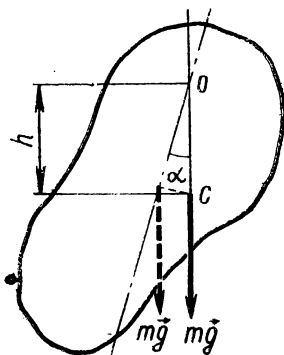


Рис. 4.9

этих сил пропорционален углу (упругая деформация), и уравнение движения имеет вид:

$$I\ddot{\alpha} = -D\alpha, \quad (4.11)$$

где I — момент инерции тела, D — постоянная кручения. Так как уравнение (4.11) по форме не отличается от уравнения (3.18), то будут совпадать и решения обоих уравнений. Следовательно, крутильный маятник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}. \quad (4.12)$$

О постоянной кручения подробно будем говорить в главе 7, здесь отметим лишь, что она пропорциональна четвертой степени диаметра и обратно пропорциональна длине нити. Поэтому в приборах, предназначенных для измерения очень малых моментов силы, применяются очень длинные и по возможности тонкие нити подвеса. При этом частота собственных колебаний оказывается очень малой, что, конечно, создает известные трудности при измерениях.

Если колебания вызваны силой тяжести, то маятник называют физическим; таковым может быть любое тело, имеющее горизонтальную ось вращения O , проходящую выше центра тяжести C (рис. 4.9).

При отклонении тела на угол α и предоставлении его самому себе возникает возвращающий момент, равный:

$$M = -mgh \sin \alpha, \quad (4.13)$$

где h — расстояние от оси вращения до центра тяжести. В случае малых углов отклонения синус можно заменить самим углом, тогда уравнение движения принимает вид:

$$I\ddot{\alpha} = -mgh\alpha.$$

Входящий в уравнение момент инерции I относительно оси O равен

$$I = I_0 + Mh^2,$$

где I_0 — момент инерции относительно оси, проведенной через центр тяжести параллельно оси O . Очевидно, и здесь получаются гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_0 + mh^2}}. \quad (4.14)$$

Анализ этой формулы показывает, что частота обращается в нуль при $h=0$, т. е. если ось проходит через центр тяжести. При увеличении h частота растет и достигает наибольшего значения при

$$h_1 = \sqrt{\frac{I_0}{m}}.$$

Дальнейшее увеличение h сопровождается уменьшением частоты.

Если маятник представляет собой маленький шарик, подвешен-

ный на длинной нити (длина h), то шарик можно уподобить материальной точке. Тогда момент инерции его равен:

$$I = mh^2, \quad (4.15)$$

и из уравнения (4.14) для частоты колебаний такого маятника (математического) получается следующее значение:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}. \quad (4.16)$$

Здесь нельзя устремлять h к нулю, так как при этом потеряет силу приближение (4.15). Но пока оно допустимо, с уменьшением длины h частота монотонно возрастает.

При движении маятников всех типов происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Рассмотрим этот вопрос на примере пружинного маятника (результаты верны и для других типов).

Мгновенная кинетическая энергия равна:

$$W_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Она принимает наибольшее значение дважды за период колебаний маятника — при прохождении его через положение равновесия.

Мгновенная энергия деформации (потенциальная), равная:

$$W_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

принимает наибольшие значения также дважды за период — при наибольших отклонениях от положения равновесия.

Мгновенная полная энергия, равная:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} m \omega^2 X_m^2 = \text{const}, \quad (4.17)$$

оказывается постоянной величиной.

В реальных условиях существует не учтенное нами трение, постепенно вызывающее убывание амплитуды, вплоть до прекращения движения. Для его учета в уравнение (4.17) нужно добавить слагаемое, учитывающее приток внутренней энергии системы. Затухающие колебания будут рассмотрены в § 8.2.

Если амплитуда колебаний не мала, так что нужно пользоваться точным уравнением (4.13), то колебания перестают быть гармоническими, но сохраняют периодичность. При углах отклонения, меньших чем 5° , выражение (4.14) дает практически точный результат. При больших углах частоты, вычисленные по уравнению (4.14), оказываются преувеличенными.

4.7. РЫЧАГИ. ПАРА СИЛ

Рычагом называется твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения и подверженное действию нескольких (не менее двух) моментов внешних сил.

Если внешние силы приложены по разные стороны относительно оси вращения, то рычаг называют рычагом первого рода. Если же они лежат по одну сторону, то — рычагом второго рода. Так, ножницы — рычаг первого рода, а весло, вставленное в уключину, — рычаг второго рода, так как точкой опоры (не вполне неподвижной) является конец весла, погруженный в воду. Схематическое изображение обоих рычагов дано на рисунке 4.10, а, б.

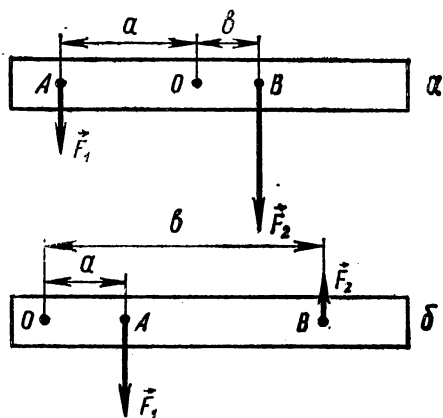


Рис. 4.10

Конечно, рычаг может быть и не прямолинейным, а силы могут быть направлены под любым не равным нулю углом к его оси.

Предполагается, что до приложения сил рычаг находился в покое. Интерес представляет нахождение условий равновесия рычага.

Так как у рычага ось неподвижная, то его движение имеет одну степень свободы, и для равновесия, т. е. покоя или равномерного вращения, необходимо соблюсти лишь одно требование: **сумма моментов внешних сил относительно оси должна быть равна нулю.**

На рисунке 4.10 след оси обозначен буквой O . Приписывая моментам, создающим вращение в противоположные стороны, **разные знаки**, получаем условие равновесия:

$$F_1 a - F_2 b = 0.$$

Поэтому

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{a}{b}. \quad (4.18)$$

Так как линейные перемещения точек приложения сил прямо пропорциональны длинам плеч рычага, то из соотношения (4.18) следует «золотое правило» механики: **«Что проигрывается в пути, то выигрывается в силе».**

К вопросу о равновесии рычага можно подойти и с иной точки зрения. Пусть силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 параллельны друг другу и перпендикулярны оси рычага. Если рычаг при этом находится в равновесии, то это возможно потому, что некоторая воображаемая сила \vec{F} , способная заменить реальные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , проходит через ось вращения. Эту силу называют, как известно, **равнодействующей** данных сил. Так как замена реальных сил равнодействующей не должна сказаться на состоянии рычага, то момент этой силы относительно

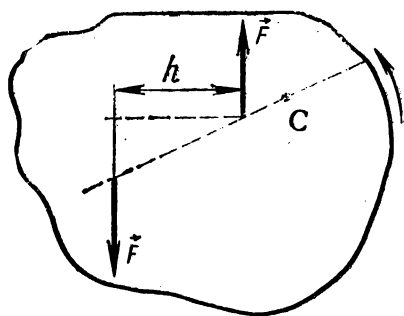


Рис. 4.11

любой оси должен равняться сумме моментов сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 относительно той же оси.

Проведем оси через точки A и B (нормально плоскости чертежа). Получаем два условия:

$$Fa = F_2(a+b); Fb = F_1(a+b).$$

Следовательно, должно быть:

$$F = F_1 + F_2. \quad (4.19)$$

Уравнения (4.18) и (4.19) определяют известные из курса сред-

ней школы правила сложения параллельных сил одного направления.

Повторяя те же рассуждения для рычага второго рода, найдем, что значение равнодействующей будет определяться разностью модулей слагаемых сил, а направлена равнодействующая будет в сторону большей силы.

Однако здесь возникает осложнение. Пусть расстояние $h = b - a$ между точками приложения сил задано, а разность модулей сил стремится к нулю. Как видно из уравнения (4.18), при этом расстояние a должно стремиться к b , что возможно только при неограниченном возрастании a и b .

Итак, система двух равных противоположно направленных сил, называемая *парой сил* (рис. 4.11), обладает особенностью: ее нельзя заменить одной силой, т. е. пара сил не имеет равнодействующей. Под действием пары сил тело приходит во вращение вокруг некоторой оси, перпендикулярной плоскости, содержащей пару. Простой расчет показывает, что момент пары

$$\vec{M} = [\vec{h}\vec{F}] \quad (4.20)$$

(где вектор \vec{h} направлен от выбранной силы к другой) постоянен относительно любой из этих осей.

Так как пара сил не вызывает поступательного движения центра масс (для этого нужна сила, отличная от нуля), то свободное тело под действием пары вращается вокруг свободной оси, проходящей через центр масс тела. Эта ось перпендикулярна плоскости, содержащей пару.

4.8. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

После ознакомления с парой сил можно уточнить условия движения свободного твердого тела в частном случае, когда все действующие на него внешние силы лежат в одной плоскости. Пусть до приложения сил тело покоилось, тогда оно будет двигаться в плоскости действия сил (плоское движение). Движение может быть

поступательным, вращательным или сложным. Если сумма сил отлична от нуля и направление результирующей силы

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i$$

проходит через центр масс тела, то движение получается поступательным. При действии на тело пары сил оно вращается вокруг своего центра масс. Если имеется суммарная сила \vec{F} , не проходящая через центр масс C (рис. 4.12), то можно в центре

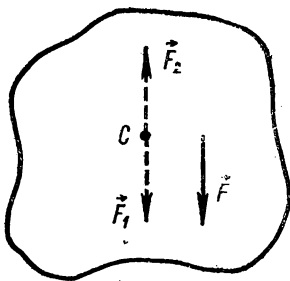


Рис. 4.12

масс приложить две равные и противоположные силы $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$. Получится пара сил (\vec{F}, \vec{F}_2) и сила \vec{F}_1 , проходящая через центр масс. Следовательно, в этом случае тело будет совершать сложное движение. Но весьма примечательно, что ускорение центра масс будет такое же, как если бы направление силы \vec{F} проходило через точку C .

Такие же соображения можно высказать и об общем случае движения тела.

Предположим, что вначале тело покоилось и мы хотим, чтобы появившиеся внешние силы не выводили его из состояния равновесия, тогда мы должны потребовать выполнения шести условий равновесия (свободное тело имеет шесть степеней свободы):

неподвижность центра масс требует обращения в нуль суммы сил, действующих на тело:

$$\Sigma \vec{F}_i = 0,$$

т. е.

$$\Sigma F_{ix} = 0, \quad \Sigma F_{iy} = 0, \quad \Sigma F_{iz} = 0;$$

отсутствие вращений требует исчезновения вращающих моментов внешних сил:

$$\Sigma \vec{M}_i = 0,$$

т. е.

$$\Sigma M_{ix} = 0, \quad \Sigma M_{iy} = 0, \quad \Sigma M_{iz} = 0.$$

Положение осей произвольно. Удобно бывает провести их через центр масс. Эти шесть уравнений и решают вопрос о равновесии свободного тела.

Если изучается движение материальной точки, то остается три условия равновесия, так как точка не может вращаться вокруг самой себя. При изучении движения тела, имеющего неподвижную ось, имеется всего одно условие: сумма моментов относительно этой оси должна обращаться в нуль.

Во всех этих случаях считается, что ось абсолютно тверда и что возможные силы, стремящиеся сломать или изогнуть ее, могут не приниматься во внимание.

Помимо установления условий равновесия тела, представляет интерес и вопрос о его устойчивости. Если тело немного сместить из положения равновесия и предоставить самому себе, то возможны три случая:

а) оно самопроизвольно возвращается в положение равновесия (устойчивое равновесие);

б) оно остается в новом положении (безразличное равновесие);

в) оно еще дальше отходит от положения равновесия (неустойчивое равновесие).

Каковы же условия устойчивости? Так как в механике встречаются только два вида энергии — кинетическая и потенциальная, то их сумма в замкнутой системе постоянна:

$$W = W_k + W_p = \text{const}$$

(здесь кинетическая энергия — существенно положительная величина).

Пусть тело покоится в положении, где его потенциальная энергия меньше, чем во всех соседних положениях. Очевидно, без внешних воздействий оно не может прийти в движение, так как при любом из возможных перемещений потенциальная энергия должна расти, что противоречит закону сохранения энергии. На кривой рисунка 4.13, где представлена потенциальная энергия тела в функции расстояния от начала координат, устойчивым состояниям отвечают точки A и B . При этом состояние A менее устойчиво, так как для нарушения равновесия требуется преодолеть меньший «потенциальный барьер» ΔW_{pA} , чем для нарушения равновесия в состоянии B . Если бы речь шла о потенциальной энергии земного притяжения, то разность энергий определялась бы разностью высот соответствующих точек, а устойчивое состояние соответствовало бы наинизшему положению тела. Поэтому в физике образно гово-

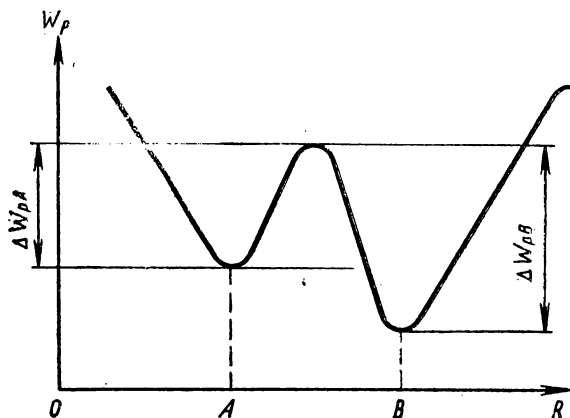


Рис. 4.13

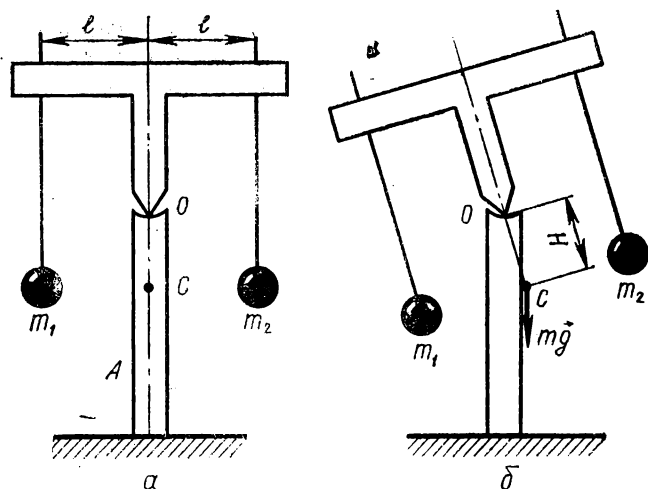


Рис. 4.14

рят о «потенциальной яме», на «дне» которой тело находится в устойчивом равновесии.

Итак, состояние равновесия характеризуется минимумом потенциальной энергии. Это весьма общее положение можно проиллюстрировать при помощи модели весов. Она состоит из опорного стержня A и горизонтального стержня, несущего два шарика массой m_i (их можно перемещать по вертикали) и жестко связанного с вертикальным стержнем; концу последнего придана форма призмы; ее ребро опирается на дно углубления в верхней части опорного стержня (рис. 4.14, а).

Условие равновесия требует, чтобы центр тяжести подвижной части прибора C лежал на вертикали, проходящей через ребро опорной призмы. При симметрии конструкции это равнозначно требованию равенства масс m_1 и m_2 . Если немного отклонить подвижную часть прибора, то центр масс сместится (рис. 4.14, б), и возникнет вращающий момент:

$$\vec{M} = [\vec{H} m \vec{g}],$$

где m — полная масса подвижной части, H — расстояние от ее центра тяжести до линии опоры.

При самом низком положении шаров центр масс расположен низко и вращающий момент возвращает систему в положение равновесия.

Если же поднять шары, то центр тяжести также поднимется. Когда он окажется выше линии опоры O , подвижная часть станет совершенно неустойчивой.

4.9. КАЧЕНИЕ

Рассмотрим явления, происходящие при качении твердого тела по твердому основанию, связанные с существованием трения. Мы увидим, что явления эти сложны, так как приходится считаться сразу с несколькими видами трения. Поэтому данный трудный вопрос будет рассмотрен лишь качественно.

Если раскрутить круговой цилиндр вокруг его оси и положить на горизонтальную плоскость, то он покатится по ней. При этом центр масс цилиндра приобретет линейную скорость, увеличивающуюся от нуля до \vec{V} , а затем снова уменьшающуюся до нуля. Угловая скорость цилиндра будет непрерывно убывать.

Если же сообщить цилиндру горизонтальную скорость \vec{v}_0 , нормальную к его оси, и положить его на горизонтальную плоскость, то поступательная скорость его центра масс будет убывать, но возникнет вращение цилиндра вокруг мгновенных осей, совпадающих с образующими цилиндра, касающимися плоскости. При этом угловая скорость сначала будет расти, а затем начнет убывать.

Оба явления родственны друг другу, поэтому мы ознакомимся только с первым, так как качественное толкование второго не вызовет затем трудностей у читателя.

Итак, в начальный момент угловая скорость цилиндра равна ω_0 ; линейная скорость центра масс равна нулю; точки на поверхности цилиндра имеют скорости, равные $\omega_0 R$, а кинетическая энергия цилиндра равна:

$$W_0 = \frac{1}{2} I \omega_0^2,$$

где R и I — соответственно радиус и момент инерции цилиндра (относительно его оси).

Когда цилиндр коснется опоры, в месте касания появится сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{ск}}$, направленная против линейной скорости точек касания. Вращение цилиндра начнет замедляться; но при этом он придет в поступательное движение. Чтобы понять, как это происходит, приложим в центре масс цилиндра (на его геометрической оси) силы

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{\text{ск}} \quad \text{и} \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1.$$

Сила \vec{F}_1 сообщает цилиндру массой m поступательное ускорение (положительное), равное:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m}, \quad (4.21)$$

а пара сил ($\vec{F}_{\text{ск}}$, \vec{F}_2) создает отрицательное угловое ускорение, равное:

$$\alpha = - \frac{F_{\text{ск}} R}{I}. \quad (4.22)$$

Допустим, что модуль силы трения скольжения (как и при сухом трении в поступательном движении) постоянен. Тогда мгновенная скорость скольжения связана с мгновенной угловой скоростью ω и мгновенной скоростью поступательного движения v соотношением:

$$v_{\text{ск}} = \omega R - v = \omega_0 R - \alpha R t - at, \quad (4.23)$$

где $\omega = \omega_0 - \alpha t$, $v = at$ (t — время, прошедшее с начала движения по плоскости).

Скольжение прекратится в момент T , определяемый условием $v_{\text{ск}} = 0$:

$$T = \frac{\omega_0 R}{\frac{F_{\text{ск}} R^2}{I} + \frac{F_{\text{ск}}}{m}}$$

и установившаяся линейная скорость будет равна:

$$V = \frac{F_{\text{ск}}}{m} T = \frac{\omega_0 R}{1 + \frac{m R^2}{I}} = \frac{\omega_0 R}{Q} = \frac{v_0}{Q}$$

(для сокращения записи введено обозначение $1 + \frac{m R^2}{I} = Q$).

Очевидно, угловая скорость установившегося вращения есть

$$\Omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Кинетическая энергия цилиндра в момент прекращения скольжения равна:

$$W_k = \frac{1}{2} m \frac{\omega_0^2 R^2}{Q^2} + \frac{1}{2} I \frac{\omega_0^2}{Q^2} = \frac{1}{2} \omega_0^2 I \left(\frac{m R^2}{I Q^2} + \frac{1}{Q^2} \right) = \frac{W_0}{Q}.$$

Итак, трение скольжения не только способствует появлению поступательного движения, но и вызывает уменьшение кинетической энергии (внутренняя энергия при этом увеличивается).

Для сплошного цилиндра ($I = \frac{1}{2} m R^2$) получается:

$$Q = 3; \quad V = \frac{v_0}{3}; \quad \Omega = \frac{\omega_0}{3}; \quad W_k = \frac{W_0}{3}.$$

Для тонкостенной трубы ($I = m R^2$) потери энергии меньше:

$$Q = 2; \quad V = 0,5 v_0; \quad \Omega = 0,5 \omega_0; \quad W_k = 0,5 W_0.$$

При движении без скольжения цилиндр вращается вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией его касания с плоскостью; следовательно, развивается еще сила трения покоя (ее часто называют также силой трения сцепления), не совершающая работы, так как

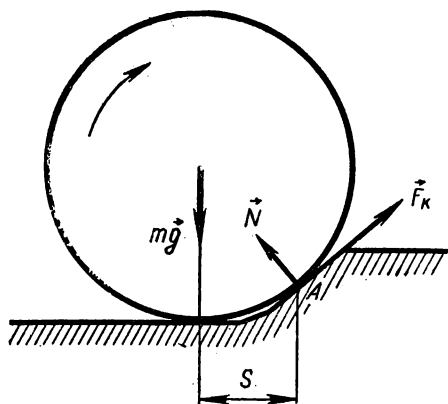


Рис. 4.15

мгновенная ось неподвижна (в данное мгновение). Но в дальнейшем скорость цилиндра постепенно уменьшается. Следовательно, необходимо учесть еще один вид трения — трение качения; работа, необходимая для преодоления этой силы трения, в нашем случае совершается за счет кинетической энергии цилиндра. Физические причины этого трения не вполне ясны; частично оно связано с неупругой деформацией полотна дороги и поверхности цилиндра.

Распределение сил для этого случая схематически показано на рисунке 4.15 (\vec{N} — реакция полотна дороги). Мгновенная ось вращения проходит через точку A; сила реакции по модулю приблизительно равна силе тяжести, действующей на цилиндр:

$$N \approx mg.$$

Тогда тормозящий момент, равный:

$$M = Ns \sin \beta,$$

определяется «выносом» s точки приложения силы реакции относительно вертикали, проведенной через центр сечения цилиндра. Определение выноса — наиболее сложная задача, так как причины и условия его возникновения известны плохо.

Теперь можно чисто формально определить силу трения качения \vec{F}_k , считая, что она приложена по линии соприкосновения, направлена по ходу движения цилиндра и создает найденный выше тормозящий момент:

$\vec{M} = [\vec{R}\vec{F}_k]$ (\vec{R} — радиус-вектор точки A), откуда

$$F_k = \frac{mgs \sin \beta}{R}.$$

Тогда выясняется, что работа силы трения (на данном участке пути) получается тем меньшей, чем больше радиус цилиндра. Кроме того, как показывает практика, вынос s при увеличении радиуса цилиндра уменьшается; наконец, при движении меньше сказываются случайные мелкие неровности дорожного полотна. Поэтому уве-

личение радиуса цилиндра (до известного предела) вполне оправдано.

Простой опыт показывает, что сила трения качения значительно меньше силы трения скольжения.

Небольшой цилиндр снабжен рамой, к которой прикладывается внешняя сила \vec{F} . Стопорный винт (его можно ввинтить в точке A , см. рис. 4.16) позволяет предотвратить вращение цилиндра. Если цилиндр катится, то для поддержания этого движения нужна малая сила. Если же ввернуть стопорный винт, то цилиндр начинает скользить и требуемая сила возрастает во много раз. Этот опыт поясняет пользу, приносимую подшипниками, где трение скольжения заменено трением качения.

Трение сцепления позволяет осуществить передачу энергии при помощи бесконечного ремня (трансмиссия). Пусть на оси некоторого двигателя имеется шкив 1, соединенный бесконечным ремнем со шкивом 2, помещенным на оси некоторой машины (рис. 4.17).

Благодаря трению сцепления шкив 1 увлекает ремень в направлении, указанном стрелкой. В свою очередь ремень, благодаря тому же трению, увлекает шкив 2, который совершает некоторую полезную работу.

Однако если сопротивление движению шкива 2 слишком велико, то сила трения сцепления (имеющая верхний предел, как и сила трения покоя при поступательном движении) не может его преодолеть, и ремень будет проскальзывать над шкивом (этим же объясняется буксование колес автомобиля при скользкой дороге и слишком большой мощности работы двигателя). При этом достаточно небольшой боковой силы, чтобы вызвать соскальзывание ремня, так как трение сцепления заменяется здесь трением скольжения, а последнее много меньше.

В заключение сделаем несколько замечаний. Мы рассмотрели только самые простые законы движения твердого тела. Подчеркнем, что хотя мы считали, что под внешними воздействиями тело не деформируется (и, в частности, его момент инерции не изменяется при изме-

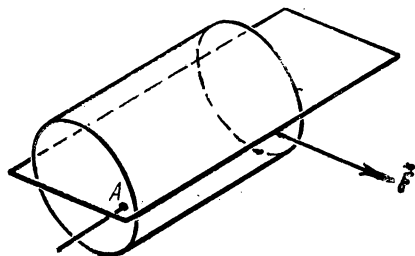


Рис. 4.16

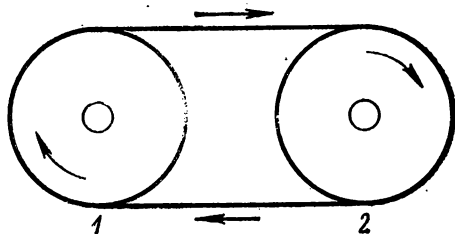


Рис. 4.17

нении скорости вращения), но фактически весьма малые деформации, конечно, происходят. Возникающие при этом внутренние силы и обеспечивают возможность движения тела, как целого.

Но эти внутренние силы не способны изменить полный импульс или момент полного импульса. Поэтому во всех наших расчетах эти силы и не появлялись.

Распространенное представление об абсолютно твердых телах лишено физического содержания, так как в абсолютно твердом теле скорость распространения механического импульса (уравнение 9.4) должна была бы быть неопределенно большой. Между тем, согласно теории относительности, передача взаимодействий не может происходить со скоростью, превышающей скорость света в вакууме (гл. 6).

Однако при решении простейших задач механики твердого тела пренебрежение его деформациями вполне допустимо и не приводит к ошибочным выводам.

Мы не считались также с возможностью разрушения твердого тела под воздействием внешних сил; некоторые соображения о прочности тел будут рассмотрены в главе 7.

Глава 5 ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

5.1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ УСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. СИЛА ИНЕРЦИИ

Законы ньютоновской механики справедливы в инерциальных системах отсчета. Должны ли они выполняться в системах отсчета, движущихся с ускорением? Вопрос этот возникает вполне естественно, так как мы живем на вращающейся Земле (явно неинерциальная система). Нужно выяснить, почему, несмотря на вращение Земли, в рассмотренных выше опытах получалось согласие с законами Ньютона.

Однако лучше начать с более простого случая: система отсчета движется поступательно с некоторым ускорением относительно инерциальной системы отсчета.

Для удобства сопоставления будем считать, что инерциальная система отсчета неподвижна. Очевидно, что при исследовании движений, когда все скорости, в том числе и относительные скорости самих систем отсчета, малы по сравнению со скоростью света в вакууме, мы по-прежнему можем пользоваться преобразованиями Галилея (см. § 1.5) и, в соответствии с соотношением (1.17), утверждать, что ускорение системы отсчета, движущейся ускоренно (подвижной системы¹), оказывается одним и тем же в любой инерциальной системе. Поэтому выбор произвольной инерциальной системы в качестве неподвижной не ограничивает общности рассмотрения. В частности, в огромном числе примеров неподвижной инерциальной системой можно считать Землю (когда ее собственным суточным вращением и ускоренным движением относительно Солнца и звезд можно пренебречь в условиях задачи).

Пусть имеется неподвижная система, связанная с Землей, и подвижная система, связанная, например, с ускоренно движущимся вагоном или лифтом. Наблюдатели, находящиеся в каждой системе, описывают наблюдаемые ими явления с точки зрения механики Ньютона. При этом считаем, что они совершенно объективны и их толкования свободны от ошибок.

Наблюдатель, находящийся в неподвижной системе, опишет многие явления, происходящие в подвижной системе, используя для их объяснения ускорение подвижной системы относительно не-

¹ В литературе вместо названий *неподвижная система* и *подвижная система* часто применяют также названия *инерциальная система отсчета* (ИСО) и *неинерциальная система отсчета* (НИСО).

подвижной. Например, так будет объяснено падение назад пассажира, стоящего в вагоне, получающем положительное ускорение, если пассажир стоит лицом в направлении ускорения.

Для наблюдателя, находящегося в подвижной системе, никакого ускорения этой системы не существует: она для него «неподвижна». И внезапное падение пассажира он объяснит действием соответствующей силы. Однако он не сможет указать тел, взаимодействие с которыми вызвало появление этой силы, т. е. обнаружит противоречие с третьим законом Ньютона.

Из этих простых примеров ясно, что в подвижной системе законы Ньютона, вообще говоря, не выполняются. Но, оказывается, можно, отказавшись от первого и третьего законов, по-прежнему пользоваться вторым законом Ньютона, а следовательно использовать уравнения движения. Для этого нужно учесть дополнительную силу, приводящую для наблюдателя в подвижной системе к отсутствию ускорений у всех тел, неподвижных относительно его системы. Такие дополнительные силы, формально вводимые в неинерциальных системах отсчета, носят название *сил инерции* $\vec{F}_{ин}$. Происхождение термина понятно. Человек в трогаящемся вагоне откидывается назад, при торможении — наклоняется вперед по инерции (в неподвижной системе), или, что то же, под действием сил инерции (в подвижной системе).

После этих вводных замечаний проведем на одном из конкретных примеров сопоставление толкований опыта в инерциальных и неинерциальных системах отсчета.

Пусть на тележку укреплена дуга, к которой подвешен маятник. Тележка соединена нитью, переброшенной через блок, с гирей; опускаясь, гирия может сообщить тележке постоянное ускорение. Если тележка неподвижна (относительно Земли), то маятник висит вертикально. Если же она получит ускорение \vec{a} , то маятник отклонится назад (против ускорения тележки) и после нескольких качаний, которые мы не примем во внимание, установится под некоторым углом к вертикали.

Свяжем с Землей неподвижную систему отсчета, а с тележкой — подвижную и попробуем истолковать явление в обеих системах.

а) **Неподвижная система.** Когда тележка начала двигаться ускоренно, то она увлекла за собой и точку подвеса маятника (*A* на рис. 5.1, *a*). Сам же маятник оставался в покое. Поэтому нить отклонилась, что привело к возникновению силы, ускоряющей маятник. В установившемся состоянии сумма сил тяжести $m\vec{g}$ маятника и натяжения \vec{T} нити дает силу \vec{F} , создающую ускорение \vec{a} :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}. \quad (5.1)$$

Итак, появление силы \vec{F} связано с ускорением тележки (результат взаимодействия гири с Землей). Таким образом, здесь выполняются все три закона Ньютона.

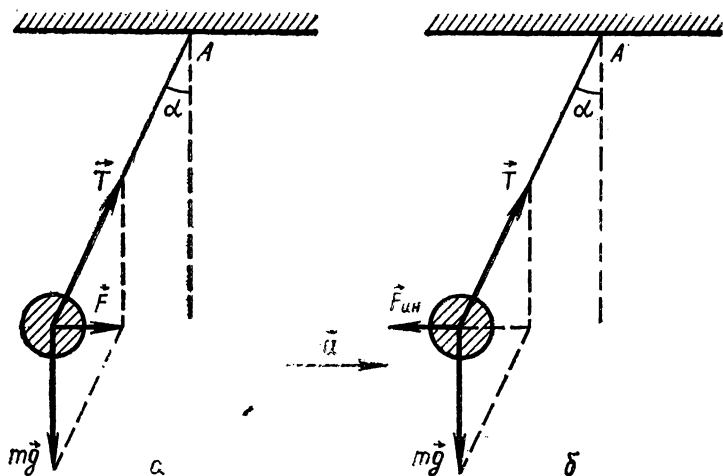


Рис. 5.1

б) **Подвижная система.** Наблюдатель не знает о движении своей системы. Так как отклоненный от вертикали маятник неподвижен относительно тележки, то по второму закону Ньютона сумма действующих на него сил равна нулю. Следовательно, кроме силы тяжести и силы натяжения нити, существует еще одна сила — сила инерции $\vec{F}_{ин}$ (см. рис. 5.1, б), причем:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{ин} = 0. \quad (5.2)$$

Таким образом, можно формально сохранить второй закон Ньютона. Но третий закон Ньютона не будет выполняться, так как нельзя найти тело, вызывающее появление силы инерции.

Силу инерции в уравнении (5.2) называют **тангенциальной**, так как рассмотренная система имела поступательное (тангенциальное) ускорение.

Между $\vec{F}_{ин}$ и \vec{a} , как это видно из уравнения (5.1), существует следующая связь:

$$\vec{F}_{ин} = -\vec{F} = -m\vec{a}.$$

Конечно, в неинерциальной системе первый закон Ньютона также не выполняется; более того, он вообще не может быть сформулирован, поскольку сила теперь уже не обязательно есть результат какого-то взаимодействия. В этом нет ничего удивительного: законы Ньютона были сформулированы для инерциальной системы отсчета.

Можно ли сказать, что описание движения в подвижной системе менее верно, чем в неподвижной? Конечно, нет. Для описания движения можно выбрать любую систему отсчета.

Иногда говорят, что сила инерции — фиктивная сила, так как для неподвижной системы ее не существует. Но с таким же правом можно было бы назвать фиктивной силу, ускоряющую тележку, так как она не существует для подвижной системы.

Говорят также, что подвижная система — система незамкнутая и что это обстоятельство и делает силу инерции не подчиняющейся третьему закону Ньютона. Но и эта точка зрения ошибочна, так как равномерно вращающаяся система также является неинерциальной. Но это вращение не требует взаимодействия с другими телами, и, следовательно, такая неинерциальная система может быть замкнутой. Поэтому термин «фиктивная» служит лишь напоминанием о том, что мы применяем второй закон Ньютона в условиях, для которых законы Ньютона несправедливы, т. е. пользуемся им чисто формально.

5.2. РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩАЯСЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА. ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА

Перейдем к равномерно вращающейся системе отсчета. Поставим на центробежную машину сосуд с плоскими стенками, частично заполненный жидкостью, укрепим на нем раму с несколькими маятниками и приведем систему в равномерное вращение вокруг вертикальной оси. При этом маятники отклонятся от вертикали, а уровень жидкости искривится (рис. 5.2).

Оба эффекта выражены тем сильнее, чем больше угловая скорость вращения прибора ω и чем дальше находятся маятники (или частицы жидкости) от оси вращения.

Обсудим эти явления в неподвижной системе и подвижной, связанной с вращающимся прибором.

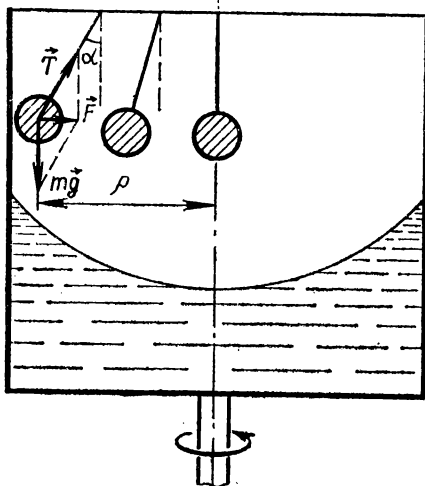


Рис. 5.2

а) Неподвижная система. Так как маятник вращается, то должна существовать сила \vec{F} , сообщаящая ему центростремительное ускорение. Она возникает благодаря наклону нити подвеса (см. § 5.1). То же верно и для жидкости. Для возникновения силы, сообщаящей центростремительное ускорение, поверхность жидкости должна искривиться. Перемещение частиц жидкости происходит вследствие нарушения первоначального равновесия.

Каковы условия равновесия отклоненного маятника? В устой-

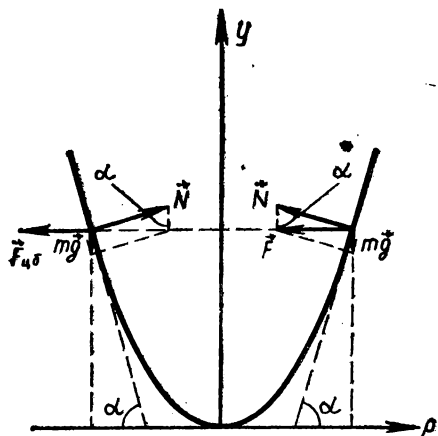


Рис. 5.3

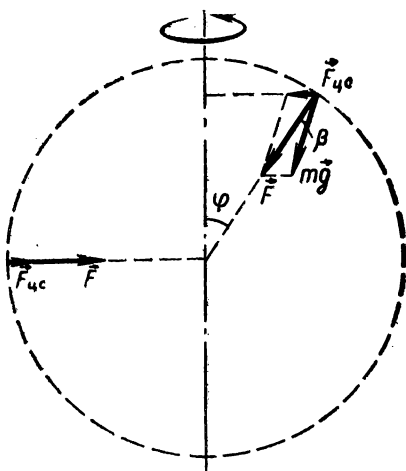


Рис. 5.4

чивом состоянии он находится на расстоянии ρ от оси вращения и отклонен на угол α (см. рис. 5.2). Поэтому сила, сообщающая маятнику центростремительное ускорение, равна:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = -\omega^2 m \vec{\rho}. \quad (5.3)$$

Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg} = \frac{\omega^2 \rho}{g}, \quad (5.4)$$

и этим объясняется поведение маятников (для центрального маятника $\rho=0$, и он не отклоняется от вертикали). Подобным же образом объясняется и поведение жидкости. Ее поверхность искривляется до тех пор, пока в каждой точке не будет выполняться условие (5.3), где роль натяжения играет сила реакции \vec{N} нижележащих слоев жидкости, нормальная к касательной поверхности в рассматриваемой точке (рис. 5.3, правая часть). Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{g} = \frac{dy}{d\rho}. \quad (5.5)$$

Следовательно, сечение жидкости вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения, ограничено параболой

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \rho^2,$$

а вся поверхность жидкости является параболоидом вращения.

б) **П о д в и ж н а я с и с т е м а** — система отсчета, связанная с вращающимся прибором. Если мы хотим сохранить второй закон Ньютона, то должны ввести силу инерции $\vec{F}_{цб}$ (рис. 5.3, слева),

удовлетворяющую условию:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{цб}} = 0.$$

Следовательно, получается:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -(\vec{N} + m\vec{g}) = -\vec{F} = m\omega^2\vec{r}. \quad (5.6)$$

Эту силу принято называть *центробежной силой инерции*.

Уравнение (5.6) свидетельствует о том, что центробежная сила инерции при медленных вращениях невелика. Именно поэтому вращение Земли вокруг своей оси (и тем более ее обращение вокруг Солнца) не сказывалось на проводившихся ранее опытах, как и на большинстве явлений, происходящих на Земле:

Но можно указать случаи, когда вращение проявляется. Примем Землю за однородный шар. Как известно, однородный шар притягивает тела с силой \vec{F} , направленной строго к центру и зависящей от расстояния до центра. Но так как тело, лежащее на Земле, участвует в ее вращении вокруг оси, то на него должна действовать сила $\vec{F}_{\text{цб}}$, сообщающая центростремительное ускорение (неподвижная система отсчета). Поэтому (рис. 5.4) давление на поверхность Земли (т. е. вес тела) должно зависеть от широты. На полюсе $\vec{a}_{\text{цб}} = 0$, поэтому вес равен силе притяжения. На экваторе же различие должно быть наибольшим. Однако даже здесь оно не очень велико. Действительно, принимая средний радиус Земли равным $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, находим:

$$a_{\text{цб}} = (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2 = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2,$$

т. е. около 0,3% ускорения свободного падения.

Это незначительное влияние собственного вращения Земли могло бы быть измерено современными методами без труда. К сожалению, оно маскируется влиянием другой причины — нестрогой шарообразностью Земли. Известно, что полярный радиус Земли меньше экваториального (примерно на 0,3%). Поэтому ускорение свободного падения, зависящее от радиуса, на экваторе меньше, чем на полюсе. Различие составляет около 0,6%, т. е. вдвое превышает уменьшение ускорения, обусловленное собственным вращением Земли. Очевидно, угол β между нормалью к поверхности земного шара и направлением отвеса (см. рис. 5.4) во всех точках земной поверхности мал (на полюсе и на экваторе он обращается в нуль).

5.3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА. СИЛА КОРИОЛИСА

Если тело перемещается во вращающейся системе отсчета, то для описания его движения в подвижной системе нужно ввести еще одну силу инерции, называемую *силой Кориолиса* (в честь французского механика).

Укрепим над диском, способным вращаться вокруг оси, проходящей через его центр, линейку, совпадающую с одним из его радиусов (эта линейка играет роль неподвижной системы координат). Проведем мелом вдоль линейки, при этом на неподвижном диске мел опишет прямую OA (рис. 5.5).

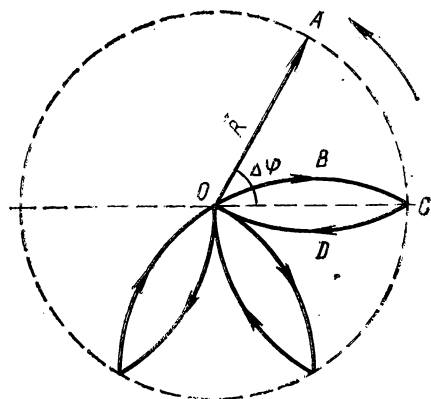


Рис. 5.5

Если же диск равномерно вращается с угловой скоростью ω , то траекторией мела на нем будет кривая OBC ; при обратном движении мела получится траектория CDO . При периодическом движении мела вдоль линейки (с постоянной по модулю скоростью u) траектория получается в виде розетки. Истолкуем наблюдаемые факты в обеих системах отсчета.

а) Неподвижная система. Пока мел движется по радиусу R , проходя его за время:

$$\Delta t = \frac{R}{u},$$

диск успеваеет повернуться на угол, равный:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t.$$

Поэтому мел попадает в точку C , причем длина дуги AC равна:

$$\Delta s = R\Delta\varphi = u\omega(\Delta t)^2. \quad (5.7)$$

б) Подвижная система (связана с диском). Так как мел отклонился от прямолинейной траектории OA и оказался в точке C , то на мел должна была действовать сила; если считать ее постоянной, то она сообщила мелу ускорение:

$$a = \frac{2\Delta s}{(\Delta t)^2}.$$

Воспользовавшись выражением (5.7), получим, что

$$a = 2u\omega.$$

Это ускорение во все время движения перпендикулярно векторам \vec{u} и $\vec{\omega}$.

Можно показать, что при произвольном направлении скорости \vec{u} получилось бы ускорение:

$$\vec{a} = 2[\vec{u}\vec{\omega}]. \quad (5.8)$$

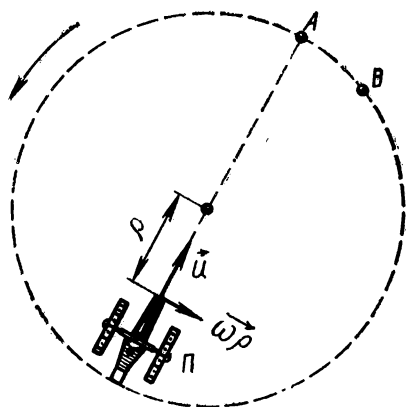


Рис. 5.6

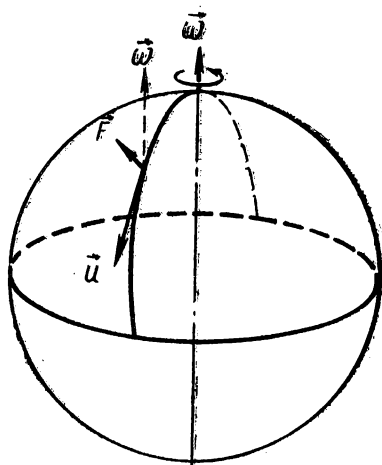


Рис. 5.7

Оно называется *ускорением Кориолиса*. Если масса тела m , то сила инерции Кориолиса есть:

$$\vec{F} = m\vec{a} = 2m[\vec{u}\vec{\omega}]. \quad (5.9)$$

Такой же эффект наблюдается, если на платформе, способной вращаться вокруг вертикальной оси, расположить пушку P и мишень и произвести два выстрела: один — при неподвижной платформе (точка попадания A), другой — при ее вращении (точка попадания B , рис. 5.6).

При количественном рассмотрении этого опыта нужно учесть, что снаряд покидает пушку, имея не только скорость \vec{u} , но и перпендикулярную ей скорость $\vec{\omega}r$, так как он участвовал во вращении платформы.

На Земле проявление силы Кориолиса не очень заметно, так как в обычных условиях скорости \vec{u} невелики и угловая скорость собственного вращения Земли также мала (угловая скорость обращения Земли вокруг Солнца еще меньше и может не учитываться). Но с силой Кориолиса (или, что то же самое, с вращением Земли) считаются при вычислении траекторий спутников, при стрельбе из дальноточных орудий.

Кроме того, малая сила, действуя длительное время, может дать ощутимый эффект. В качестве примера рассмотрим реку, текущую в северном полушарии в направлении меридиана (рис. 5.7). Применяя формулу (5.9) к частице воды в реке, находим, что сила Кориолиса направлена в сторону правого берега. Поэтому он должен подмываться сильнее, чем левый, и за большие промежутки времени этот эффект может стать вполне заметным. Действительно, в ряде случаев

это предположение подтверждается. Однако так как условия течения воды в реках очень сложны, то факт подмывания правого берега не следует целиком приписывать действию силы Кориолиса.

Действие кориолисовой силы на потоки воздуха проявляется в распределении ветров, дующих над гладью океана; однако и здесь существует ряд дополнительных причин, определяющих направление ветра.

В неподвижной системе координат рассмотренные эффекты объясняются переходом струи воды (или воздуха) из областей с одной касательной скоростью (обусловленной участием струи во вращении Земли вокруг своей оси) в область с другой (по модулю) касательной скоростью, в результате чего струя оказывает давление на один из берегов (и сама подвергается дополнительному давлению).

В чистом виде сила инерции Кориолиса проявляется в знаменитом опыте Фуко (1850 г.). Модель опыта легко показать, установив на центробежной машине вертикальную рамку и укрепив на ней маятник (рис. 5.8). Заставим маятник качаться в плоскости рамки и начнем медленно поворачивать платформу вокруг вертикальной оси. При этом плоскость колебаний маятника сохраняет свое положение относительно стен комнаты, а плоскость рамки последовательно занимает положения O_1O_4 , O_5O_2 , ...

С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе это вполне понятно: маятник не участвует во вращении платформы, а последняя поворачивается в пространстве. С точки зрения наблюдателя в подвижной системе плоскость колебаний маятника поворачивается, и, следовательно, на маятник действует сила инерции Кориолиса.

Реальный опыт Фуко удается в высокой аудитории с большим маятником (длиной несколько метров). Для фиксации плоскости колебаний маятника его освещают сильным источником света в пер-

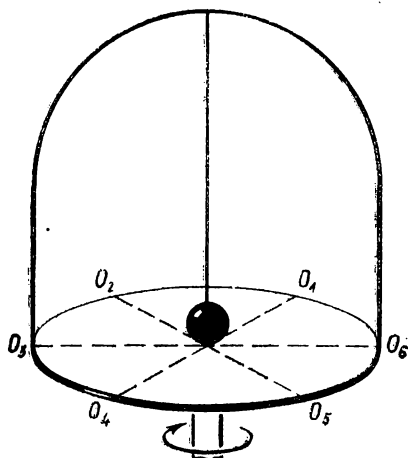


Рис. 5.8

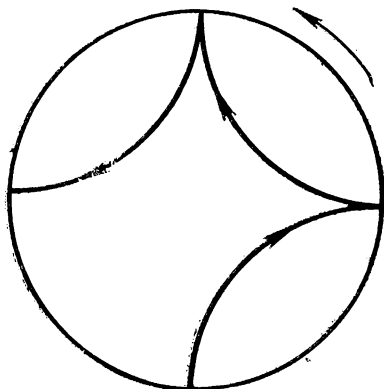


Рис. 5.9

воначальной плоскости качаний; полученную на экране тень нити подвеса отмечают, например, цветной чертой.

При первых колебаниях тень нити совпадает с этой чертой. Но через 5—10 мин Земля успевает повернуться на $1-2^\circ$ и смещение тени становится вполне отчетливым. Чтобы запустить маятник без случайного бокового толчка (толчок искажил бы результаты опыта), маятник закрепляют в положении наибольшего отклонения петель из тонкой нити, а затем нить пережигают. Так как при этом маятник уже обладает скоростью, присущей той точке земной поверхности, где он покоился, то описываемая им розетка (рис. 5.9) отличается от розетки, показанной на рисунке 5.5: характерно, что маятник не проходит через положение равновесия (центр окружности). Впрочем, в реальном опыте лепестки розетки искривлены так незначительно, что заметить искривление практически невозможно.

Легко сообразить, что для наблюдателя, находящегося на Земле (подвижная система), на полюсе плоскость колебаний поворачивается с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли. На экваторе маятник, колеблющийся в плоскости меридиана, не будет подвержен действию силы Кориолиса, так как векторы $\vec{\omega}$ и \vec{u} параллельны. На промежуточных широтах Ψ угловая скорость поворота плоскости колебаний маятника относительно Земли оказывается равной:

$$\omega_\Psi = \omega \sin \Psi.$$

Если маятник качается в плоскости экватора, то сила Кориолиса направлена по радиусу Земли и, в зависимости от знака скорости \vec{u} , кориолисово ускорение то будет прибавляться к ускорению свободного падения, то вычитаться из него. Поэтому периоды колебаний двух одинаковых маятников, колеблющихся на экваторе в его плоскости и в плоскости меридиана, различны. Однако это различие настолько мало, что его невозможно обнаружить в лекционном опыте. Подчеркнем, что рассуждения об опыте Фуко мы вели в подвижной системе.

5.4. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИЛ ТЯГОТЕНИЯ И СИЛ ИНЕРЦИИ

А. Эйнштейн обратил внимание на одну особенность сил инерции: каждая из них сообщает ускорение, не зависящее от массы тела. Как известно, такой же особенностью обладает и сила тяготения. Эта особенность позволяет подойти к тяготению с новой точки зрения. Представим себе наблюдателя, находящегося в лифте, подвешенном над Землей. Он замечает, что все тела, будучи подняты над полом и предоставлены самим себе, падают с одинаковым ускорением \vec{g} . Тела же, достигшие пола, давят на него с силами, пропорциональными \vec{g} . Если теперь лифт привести в ускоренное движение

вниз в вертикальном направлении (с ускорением \vec{a} относительно системы координат, связанной с Землей), то наблюдатель в кабине обнаружит, что ускорения всех свободных тел (относительно лифта) стали равны:

$$\vec{a}_1 = \vec{g} - \vec{a}, \quad (5.10)$$

и силы давления на пол лифта также стали пропорциональны \vec{a}_1 (т. е. $\vec{g} - \vec{a}$).

Если лифт будет падать свободно (с ускорением \vec{g} относительно Земли), то для наблюдателя, находящегося в лифте, проявления силы тяжести полностью исчезнут.

При этом никакими физическими опытами (внутри лифта) невозможно определить, что же произошло: изменилось тяготение или возникла сила инерции (поле тяготения предполагается однородным), противонаправленная силе тяготения?

Так как однородные поля можно создать только в ограниченной области пространства, то и эквивалентность сил тяготения и инерции существует только в ограниченной области. Эта глубокая мысль — принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции — положена Эйнштейном в основу общей теории относительности. Мы вернемся к рассмотрению этих вопросов в конце главы 11.

6.1. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Классическая механика Ньютона превосходно объясняет весьма широкий круг явлений макроскопического масштаба. На следствиях из законов Ньютона основана почти вся современная техника. Однако уже в конце XIX в. выяснилось, что выводы механики противоречат некоторым опытным данным, т. е. что мы приблизились к границам применимости механики Ньютона.

В частности, при изучении движения быстрых заряженных частиц — электронов ($e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_0 = 0,91 \cdot 10^{-30}$ кг) — оказалось, что их движение не подчиняется законам механики. Действуя электрическим полем на электрон с ничтожно малой начальной скоростью, можно сообщить ему кинетическую энергию за счет работы электрических сил. Если электрон пройдет в поле разность потенциалов U и будет только ускоряться, то конечную скорость v можно вычислить из классического уравнения:

$$A = eU = W_k = \frac{1}{2} m_0 v^2. \quad (6.1)$$

Воздействуя затем на ускоренный электрон электрическим и магнитным полями, можно найти его действительную скорость v_1 и сравнить с расчетной скоростью v . На рисунке 6.1 приведены результаты подобных опытов, проведенных впервые в самом начале XX в. Квадрат расчетной скорости v в функции U представляется прямой линией. Графиком квадрата истинной скорости является кривая; сопоставление графиков показывает, что при малых скоростях механика Ньютона хорошо отвечает опытам; но при скоростях, приближающихся к скорости света в вакууме, действительная скорость растет гораздо медленнее расчетной и не превышает скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Тогда же физики установили, что для правильного истолкования результатов опыта достаточно приписать электрону

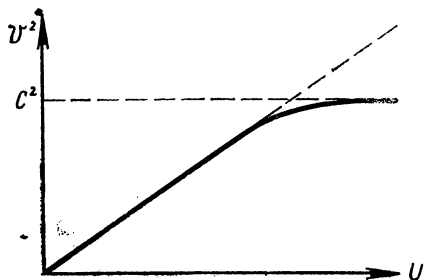


Рис. 6.1

импульс

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{где } \beta = \frac{v}{c}, \quad (6.2)$$

отличающийся от классического импульса $\vec{p}_0 = m_0 \vec{v}$ множителем

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Правомерность такого допущения будет рассмотрена позже (§ 6.5). Здесь лишь отметим, что с этой поправкой приходится считаться в технике при расчете современных ускорителей заряженных частиц.

В таблице 1 приведены отношения импульса электрона p , вычисленного по формуле (6.2), к импульсу p_0 .

Т а б л и ц а 1

$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{p}{p_0}$	$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{p}{p_0}$
10^{-5}	$1 + 1 \cdot 10^{-10}$	0,99	7,09
10^{-2}	$1 + 5 \cdot 10^{-5}$	0,995	10,01
0,1	1,0005	$1 - 5 \cdot 10^{-5}$	100
0,5	1,155	$1 - 5 \cdot 10^{-7}$	1000
0,9	2,294	$1 - 5 \cdot 10^{-9}$	10 000
0,95	3,202	$1 - 5 \cdot 10^{-11}$	1 000 000

Из таблицы видно, что введение поправки совершенно необходимо.

Затруднения возникли также при попытках применить механику Ньютона к вопросам распространения света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то, по Ньютону, измеренная скорость света должна зависеть от относительной скорости их движения. По образному выражению Эйнштейна, если «бежать навстречу свету», то его относительная скорость должна возрасти; если же «убегать от света», то она должна уменьшиться. Однако ряд очень тонких опытов (они будут рассмотрены в «Оптике») показал, что определяемая в этих условиях скорость света остается постоянной и равной c .

Для объяснения этих (и некоторых других) опытных результатов нужно было создать новую механику, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ($\beta \ll 1$).

Это и удалось сделать в 1905 г. А. Эйнштейну (1877—1955). Новая механика получила название специальной (частной) теории относительности (СТО).

Для лучшего понимания новизны идей Эйнштейна вспомним еще раз основы механики Ньютона.

6.2. МЕХАНИКА НЬЮТОНА И ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

Механика Ньютона представляет пространство трехмерным, однородным, изотропным, причем его свойства не зависят от процессов, происходящих в пространстве. Эти свойства абсолютны.

Время также считается абсолютным, не зависящим от происходящих процессов и условий его измерения.

Для описания физических процессов необходимо выбрать систему отсчета (оси координат и часы), в которой будет производиться описание.

Взаимодействия тел приводят к возникновению ускорений, что описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{или} \quad d\vec{p} = \vec{F} dt, \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

В этой записи скрыто существенное допущение: предполагается, что взаимодействие передается мгновенно, с бесконечно большой скоростью. Действительно, пусть в момент t сила по тем или иным причинам изменится. Возникает вопрос: сразу ли это изменение скажется? Судя по записи закона — сразу. Но по здравому смыслу (если только скорость распространения взаимодействия конечна) должно возникнуть некоторое запаздывание. Если сила записана для момента t , то ускорение должно относиться к более позднему моменту $t + \frac{R}{c_1}$, где R — расстояние между взаимодействующими объектами, c_1 — скорость передачи взаимодействия.

Понятие бесконечной скорости c_1 облегчает задачу экспериментаторов: им достаточно иметь для всех систем отсчета одни единственные часы и посылать сигналы времени — они везде будут приниматься мгновенно.

Механика Ньютона выделяет инерциальные системы отсчета (ИСО), движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, и утверждает их равноправие: во всех таких системах механические процессы происходят (в одинаковых условиях) одинаково и никакими механическими опытами, проведенными внутри системы, нельзя обнаружить ее движение. Иначе говоря, законы Ньютона сохраняют свой вид (они инвариантны) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой; сохраняются также ускорения и силы. Что же касается скоростей, то, по Галилею, они преобразуются путем векторного сложения. Если одну из ИСО принять за неподвижную (система $XOYZ$), а другой приписать постоянную скорость v вдоль оси абсцисс (система $X'O'Y'Z'$), причем оси обеих систем соответственно параллельны и в момент $t=0$ начала координат систем совпадают, то координаты материальной точки преобразуются по правилам:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt; & y' &= y; & z' &= z; \\ x &= x' + vt; & y &= y'; & z &= z'. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Добавим к этому одинаковость отсчета времени:

$$t' = t \quad (6.2)$$

и равенство длин отрезка, ограниченного точками M_1 и M_2 , имеющими соответственно координаты x_1, y_1, z_1 , и x_2, y_2, z_2 в нештрихованной системе и x'_1, y'_1, z'_1 и x'_2, y'_2, z'_2 в штрихованной:

$$R^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \\ = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 = R'^2. \quad (6.3)$$

Наконец, из одинаковости времени следует, что два физических явления (события), одновременные в одной системе отсчета, будут таковыми же и в другой. Это очевидно для событий, происходящих в одном месте. Но для событий, происходящих в разных местах, это совсем не очевидно, и сделанное утверждение основано на допущении бесконечной скорости распространения взаимодействий (значит, и сигналов). Эта бесконечная скорость принималась физикой XVII—XVIII вв., но не была доказана экспериментально. Пока речь шла о медленных движениях, это допущение не вело к противоречию с опытом.

6.3. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА. ОДНОВРЕМЕННОСТЬ

Анализируя основы механики Ньютона, А. Эйнштейн пришел к заключению, что представление об абсолютности свойств пространства и времени ошибочно: эти свойства зависят от происходящих событий. Событие должно описываться неразрывно связанными друг с другом пространственными координатами и временной координатой, определяющими место и время совершения события. Скорость распространения сигналов конечна, вследствие чего представление об абсолютности одновременности также ошибочно и должно быть пересмотрено.

В основу своей теории Эйнштейн положил два постулата:

1. Все физические явления во всех инерциальных системах протекают (при одинаковых условиях) одинаково. (Напомним, что Галилей утверждал то же самое, но лишь для механических явлений).
2. Существует предельная скорость передачи взаимодействия (или сигналов), равная скорости света в вакууме c . Результаты измерений этой скорости не зависят от относительного движения источника сигналов и их приемника и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Во время создания специальной теории относительности уже были известны фундаментальные законы электродинамики, выраженные в уравнениях электромагнитного поля, написанных Максвеллом. Они не сохраняли форму при преобразованиях Галилея. Законы же Ньютона в классической форме удовлетворяли этому требованию. Следовательно, нужно было отказаться или от уравнений Максвелла, или же от законов Ньютона и преобразований Галилея.

Эйнштейн пошел по второму пути. Он заменил преобразования Галилея иными (преобразованиями Лоренца) и дал новую форму законам механики. Тогда и уравнения механики, и уравнения электродинамики удовлетворили первому постулату Эйнштейна.

Особое значение Эйнштейн придавал понятию одновременности двух пространственно удаленных событий. Рассмотрим ход его рассуждений.

Прежде всего, коль скоро сигнал распространяется с конечной скоростью, уже нельзя обойтись одними часами в двух инерциальных системах отсчета. Напротив, в каждой из них должно быть поставлено множество часов, идущих одинаково точно и синхронно (т. е. показывающих в данный момент одно и то же время). В системе отсчета, где часы покоятся, можно обеспечить одинаковость хода часов, измеряя промежутки времени, в течение которого происходит группа событий, например излучение определенного числа световых волн атомами какого-либо газа (именно так и устанавливается в наше время эталон времени). Все часы регулируются до тех пор, пока измеренная ими длительность процесса не будет совпадать с длительностью, измеренной эталонными часами.

Для синхронизации отрегулированных часов Эйнштейн предложил следующую операцию. Два наблюдателя (в системе, где часы неподвижны) располагаются в двух точках системы. Они имеют зеркала, обращенные друг к другу и параллельные друг другу, и часы. Старший наблюдатель с часами, источником сигналов и приспособлениями для их приема располагается на прямой, соединяющей младших наблюдателей, и посылает сигналы. Они отражаются от зеркал младших наблюдателей и возвращаются к старшему, который меняет свое положение до тех пор, пока сигналы не вернутся к нему одновременно, т. е. он будет как раз посередине между младшими наблюдателями. Тогда он посылает в момент t по своим часам еще один сигнал, возвращающийся к нему в момент $t + 2\Delta t$. Следовательно, сигнал распространяется в одну сторону (к младшим наблюдателям) за промежуток времени Δt . Теперь старший наблюдатель приказывает младшим в момент получения сигнала установить на своих часах показания, равные t_1 , а сам посылает сигнал в момент $t_1 - \Delta t$.

Таким способом можно синхронизировать все часы в данной ИСО. Такая же операция производится с часами, неподвижными в другой ИСО. Для синхронизации часов обеих систем старшие наблюдатели сходятся в началах координат и в момент совпадения последних устанавливают на своих часах одинаковые показания (разумеется, эта операция предшествует операции, обеспечивающей синхронизацию).

Итак, имеются две системы отсчета с синхронизированными одинаково идущими часами. В штрихованной системе находятся два зеркала — 1 и 2 (рис. 6.2, а) — на равных расстояниях от точки O' . В нештрихованной системе в точке O расположен наблюдатель. Точка O лежит на перпендикуляре, опущенном из точки O' . Если обе системы неподвижны и в точке O' создается световой импульс,

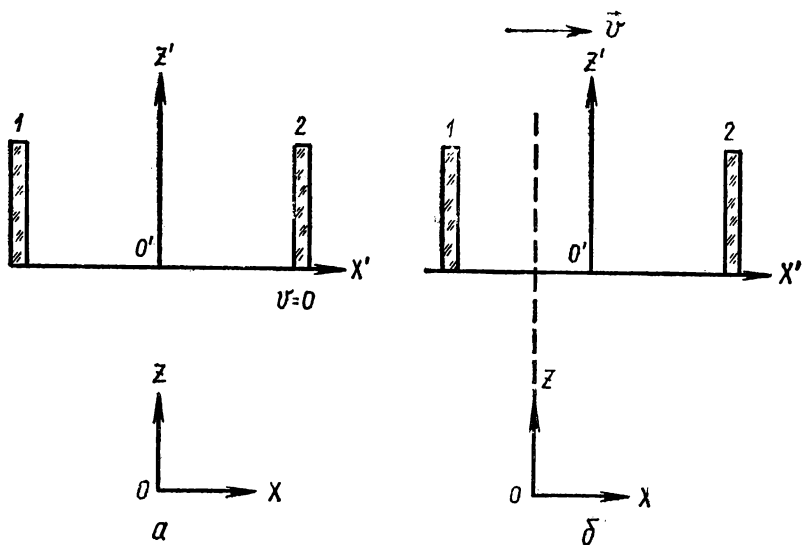


Рис. 6.2

распространяющийся к зеркалам, то он достигнет их одновременно (с точки зрения обоих наблюдателей). Пусть теперь штрихованная система движется вправо со скоростью \vec{v} . Сигнал из точки O' подается снова в тот момент, когда O' и O лежат на перпендикуляре. По второму постулату Эйнштейна сигнал достигнет зеркал одновременно (с точки зрения наблюдателя в системе $X'O'Z'$, где источник и зеркала не находятся в относительном движении). Но наблюдатель в системе XOZ найдет, что зеркало 1 приближается, а зеркало 2 удаляется от точки, из которой послан сигнал (рис. 6.2, б). Поэтому он заключит, что сигнал достигнет зеркал неодновременно.

Таким образом, при оценке одновременности процессов, происходящих в разных точках пространства, обнаруживается ее относительность.

6.4. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДЛИН ОТРЕЗКОВ И ПРОМЕЖУТКОВ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим еще один пример, доказывающий относительность длин отрезков и промежутков времени, измеряемых в движущихся инерциальных системах отсчета.

В штрихованной системе $X'O'Y'Z'$ находятся «световые часы» — устройство, состоящее из двух зеркал (1 и 2), обращенных друг к другу (рис. 6.3), и приспособления для отсчета времени. Часы расположены вертикально вдоль оси Z' . Расстояние между зеркалами λ_0 . Пусть штрихованная система движется со скоростью \vec{v} , па-

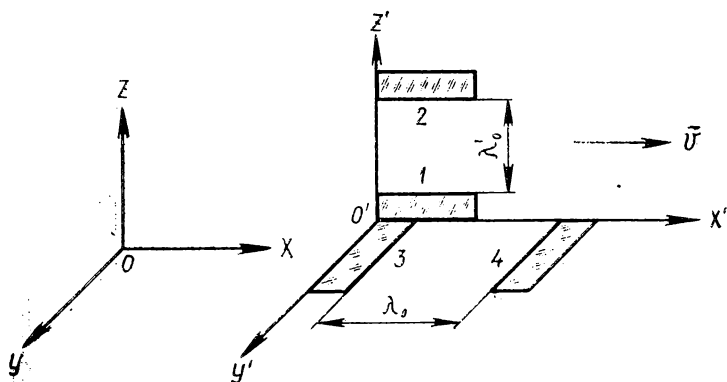


Рис. 6.3

параллельной оси абсцисс. В момент $t' = t = 0$, когда начала координат O и O' совпадают, посылается световой сигнал, отражающийся от зеркала 2 и возвращающийся к зеркалу 1 в момент

$$t'_0 = \frac{2\lambda'_0}{c}.$$

Наблюдатель в нештрихованной системе $XOYZ$ найдет, что путь светового сигнала был совсем иным (ведь зеркала двигались!). Из рисунка 6.4 видно, что путь определяется ломаной линией ABD , длина которой превышает λ'_0 , а потому время движения сигнала $t_3 > t'_0$.

Если такие же часы расположены горизонтально (вдоль оси X'), то время распространения в них светового сигнала по-прежнему равно t'_0 (для штрихованной системы). Но наблюдатель в нештрихованной системе находит, что путь светового луча (рис. 6.5) равен:

$$2\lambda_1 + vt_1 - vt_2,$$

где λ_1 — длина часов, неизвестная наблюдателю, t_1 — время движения сигнала до зеркала 4, t_2 — время движения отраженного сигнала до зеркала 3.

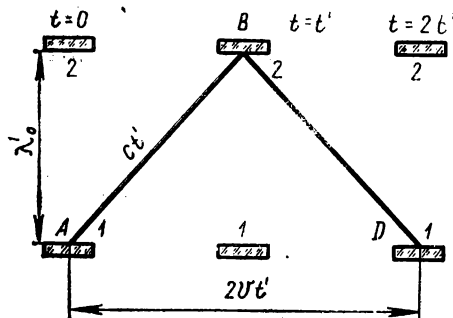


Рис. 6.4

Так как полное время движения сигнала должно по-прежнему равняться t_3 (оба наблюдателя делают одинаковые заключения об одновременности процессов возвращения световых сигналов обоих часов к зеркалам 1 и 3, т. е. в одно и то же место!), то наблюдатель в нештрихованной системе может составить два уравнения для определения λ_1 и t_3 .

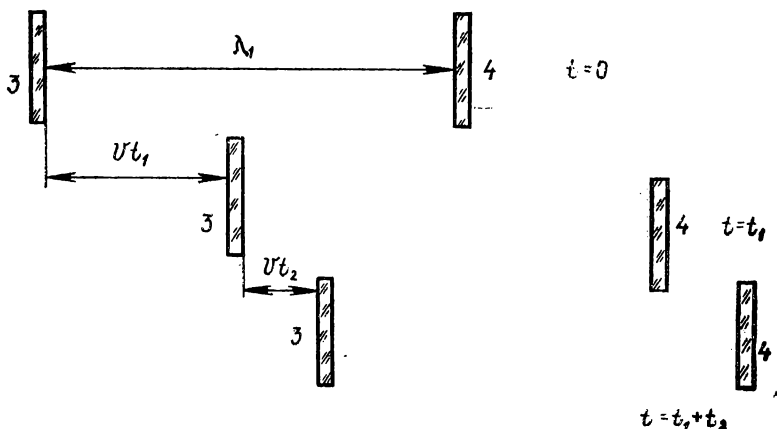


Рис. 6.5

В результате вычислений он найдет, что

$$t_3 = \frac{t'_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \lambda_1 = \lambda'_0 \sqrt{1-\beta^2}. \quad (6.4)$$

Таким образом, длины отрезков и промежутки времени, за которые происходят процессы, относительноны — они зависят от скорости системы. Значения t'_0 и λ'_0 , измеренные в системе, где часы покоятся, называются собственной длиной и собственным временем.

Если бы подобные же наблюдения за часами, находящимися в системе $XOYZ$, вел наблюдатель из штрихованной системы, он пришел бы к таким же результатам. И каждый был бы прав со своей точки зрения.

При изучении движения элементарных частиц (мезонов) получены прямые подтверждения изменения хода времени в системе, связанной с Землей, по сравнению с системой, связанной с быстро движущимся мезоном. Мезон — нестабильная частица, несущая единичный элементарный положительный заряд; масса его превышает массу электрона в 270 раз. Установлено, что в системе, где мезон покоится, время его жизни равно $t_0 = 2,5 \cdot 10^{-8}$ с.

Однако имеются данные, свидетельствующие о возможности регистрации мезона на расстоянии сотен метров от места его рождения (в системе отсчета, связанной с Землей). С классической точки зрения путь, который способен пройти мезон до своего распада, равен:

$$l_0 \approx ct_0 = 7,5 \text{ м},$$

так как скорость мезона очень близка к скорости света ($v=c(1-5 \cdot 10^{-3})$). Эта величина в сотни раз меньше пути, оцениваемого

земным наблюдателем. Дело в том, что в системе отсчета, связанной с Землей, время жизни мезона составляет:

$$t = t_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 100 t_0.$$

За это время мезон может пройти путь, равный 750 м, что соответствует опытному данным.

Прямых опытов, дающих возможность измерить сокращение длины, пока не имеется, но справедливость этого заключения доказывается справедливостью специальной теории относительности в целом.

Итак, длина отрезка и длительность промежутка времени оказываются относительными, зависящими от скорости системы отсчета.

А. Эйнштейн подчеркивал неразрывную связь пространственно-временных характеристик событий. Она проявляется, в частности, в сохранении неизменным так называемого интервала s во всех инерциальных системах отсчета. Квадрат интервала выражается следующим образом:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - R^2. \quad (6.5)$$

В механике Ньютона пространство и время рассматриваются раздельно, и там по отдельности сохраняются (во всех ИСО) первое слагаемое правой части (6.5) и сумма трех последних слагаемых.

6.5. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ

Нарушение одновременности пространственно разделенных событий в различных инерциальных системах отсчета (ИСО) и зависимость расстояний и промежутков времени от скорости ИСО, конечно, несовместимы с преобразованиями Галилея.

В специальной теории относительности эти преобразования заменены преобразованиями Лоренца, имеющими следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; & x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y &= y'; & z &= z'; & y' &= y; & z' &= z; \\ t &= \frac{t' - \beta \frac{x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}; & t' &= \frac{t + \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \text{где } \beta &= \frac{v}{c}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Эти преобразования верны для инерциальных систем отсчета, свойства которых определялись в предшествующем параграфе.

Движение одной ИСО относительно другой сказывается лишь на координате, вдоль которой происходит относительное перемещение систем, и на времени.

Для нахождения преобразования скоростей нужно взять дифференциалы от обеих частей уравнений. Ограничиваясь простейшим случаем движения точки вдоль оси абсцисс, получаем:

$$dx = \frac{dx' - v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad dt = \frac{dt' - dx' \frac{\beta}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Деля эти выражения друг на друга, находим закон преобразования скоростей в СТО:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} - v}{1 - \frac{dx'}{dt'} \cdot \frac{v}{c^2}}, \quad (6.7)$$

где $\frac{dx}{dt}$ — скорость точки в неподвижной ИСО;

$\frac{dx'}{dt'}$ — скорость точки в подвижной ИСО;

v — относительная скорость обеих ИСО.

Таким образом, преобразование скоростей уже не подчиняется принципу наложения.

Если изучается распространение света в вакууме ($\frac{dx'}{dt'} = c$), то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c,$$

как это и требуется вторым постулатом Эйнштейна.

При $\frac{dx'}{dt'} \ll c$ и $\beta \ll 1$ получается преобразование Галилея, как предельный случай преобразования Лоренца.

Не приводя длительных вычислений ускорений, укажем, что они не сохраняются при переходе от одной ИСО к другой.

Первый постулат Эйнштейна требует сохранения формы фундаментальных законов физики во всех инерциальных системах отсчета. Фундаментальным является второй закон Ньютона. Эйнштейн показал, что форма записи второго закона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

сохраняется, если под импульсом понимать выражение:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.8)$$

При $\beta \ll 1$ из (6.8) для импульса получается классическое выражение.

Так как ускорения при преобразованиях Лоренца не сохраняются, то не сохраняются и силы. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой. Это совпадение возможно

только в двух случаях: когда сила все время параллельна скорости или все время перпендикулярна ей.

Пусть, например, на неподвижную точку с массой m_0 в момент $t=0$ начинает действовать постоянная сила \vec{F} . Второй закон в релятивистской форме дает:

$$\vec{F} dt = d\vec{p} \quad \text{или} \quad F dt = m_0 c db, \quad \text{где} \quad b = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Интегрируя по времени от нуля до t и по b от нуля до b , получаем:

$$Ft = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Следовательно,

$$\beta^2 = \frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}.$$

При малых t (малые β) приходим к классическому результату:

$$v = \frac{Ft}{m_0}.$$

При неограниченном возрастании времени получается в соответствии со вторым постулатом Эйнштейна:

$$\beta \rightarrow 1, \quad v \rightarrow c.$$

Рассмотрим простейший случай работы силы — сила параллельна перемещению. При элементарном перемещении $\vec{v} dt$ работа равна:

$$dA = F dv = v dp.$$

Но импульс можно представить в виде:

$$p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Поэтому

$$dp = m_0 c (1-\beta^2)^{-3/2} d\beta$$

и элементарная работа равна:

$$dA = m_0 c \frac{v d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0 c^2 \frac{\beta \cdot d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя по β , находим прирост кинетической энергии свободной материальной точки (или поступательно движущегося тела):

$$A = W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (6.9)$$

При $\beta=0$ $W_k=0$, как это и должно быть. При малых β , пользуясь приближенным выражением

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2,$$

получаем:

$$W_k' = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} m v^2,$$

что соответствует классической механике. Но при больших значениях результат расходится с классическим: кинетическая энергия, определяющаяся по формуле (6.9), превышает классическую.

6.6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ МАССОЙ И ЭНЕРГИЕЙ

Уравнение (6.9) можно переписать в виде:

$$W_k + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = W. \quad (6.10)$$

Величину W называют *полной энергией*. В это выражение можно ввести релятивистский импульс (6.8), тогда

$$W = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}, \quad (6.11)$$

в чем легко убедиться простой подстановкой.

Из соотношения (6.11) получаются весьма важные следствия. Пусть точка покоится ($p=0$). Тогда

$$W = W_0 = m_0 c^2,$$

т. е. покоящаяся точка (тело) обладает энергией

$$W_0 = m_0 c^2, \quad (6.12)$$

называемой *энергией покоя* (собственной энергией). При изменении состояния тела его энергия покоя должна меняться вместе с изменением внутренней энергии, составляющей часть собственной. Однако нагревание, электризация, намагничивание и т. д. изменяют полную энергию макроскопических тел неощутимо мало.

Соотношение (6.12), устанавливающее неразрывную связь энергии и массы, является одним из важнейших следствий специальной теории относительности. Эта связь коренным образом изменила возможности энергоснабжения человечества. Не менее важно и методологическое значение этого соотношения, объединяющего ранее разобщенные физические понятия.

Уравнение (6.9) можно написать в виде:

$$W_k = W - W_0, \quad (6.13)$$

показывающем, что кинетическая энергия есть разность между полной энергией и энергией покоя.

Из вышеизложенного следует, что ньютоновская механика применима в тех случаях, когда полная энергия мало отличается от энергии покоя, в частности при малых скоростях. Если же полная энергия в десятки раз превышает энергию покоя, то ее можно считать кинетической энергией. При этом законы классической механики уже непригодны и должны заменяться законами СТО.

Если в уравнении (6.11) положить $m_0=0$, то получится:

$$W=pc.$$

Этот удивительный результат говорит о возможности существования физических объектов, обладающих импульсом и энергией, но лишенных массы покоя (т. е. движущихся в любой инерциальной системе отсчета). Таким объектом являются «атомы» света — фотоны; они, конечно, движутся со скоростью света, их импульс равен:

$$p = \frac{W}{c}. \quad (6.14)$$

Нагревание тела, поглощающего свет, свидетельствует о том, что свет обладает энергией. Световое давление на преграду, экспериментально обнаруженное П. Н. Лебедевым в конце прошлого века, доказывает, что свет обладает импульсом.

Так как свет (фотоны или электромагнитное поле) не может быть остановлен, то он не может служить системой отсчета.

Уравнение (6.12), связывающее собственную энергию с массой, нашло полное подтверждение в ядерной физике.

Как известно, ядра атомов состоят из ядер водорода — протонов и нейтральных частиц — нейтронов. Число протонов Z определяет место элемента в периодической системе Менделеева; сумма числа протонов Z и числа нейтронов N определяет массовое число элемента, т. е. округленную до ближайшего целого числа массу сложного ядра, выраженную в атомных единицах массы (1 а.е.м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, что соответствует массе покоящегося протона).

По классическим представлениям масса ядра должна равняться сумме масс частиц, образующих ядро. Опыты же показали, что для всех ядер выполняется условие:

$$m_{\text{я}} < Zm_p + Nm_n,$$

где $m_{\text{я}}$ — масса покоя ядра, m_p — масса покоя протона, m_n — масса покоя нейтрона. Если умножить обе части уравнения на c^2 , то получится соотношение между соответствующими собственными энергиями:

$$W_{\text{я}} < W_p + W_n.$$

Поэтому можно сделать следующие заключения:

1. При образовании ядра из составных частиц (детали этого процесса нам неизвестны) происходит выделение энергии в количестве

$$\Delta W = (W_p + W_n) - W_{\text{я}}$$

на каждое образовавшееся ядро. Это либо энергия излучений, сопровождающих ядерный синтез, либо кинетическая энергия, приобретаемая ядром при образовании его, впоследствии утрачиваемая при столкновениях с другими частицами.

2. Для разделения ядра на элементарные составные части (протоны и нейтроны) требуется сообщить ему энергию, не меньшую, чем ΔW (так как продукты разделения могут обладать еще и кинетической энергией). Величина ΔW называется *энергией связи*. Так как вместо ΔW можно всегда написать:

$$\Delta W = \Delta mc^2,$$

то часто говорят о том, что ядро обладает недостатком (дефектом) массы Δm .

Современная ядерная энергетика развивается по двум направлениям:

а) Первое направление опирается на возможность получения ядерной энергии при синтезе более тяжелых элементов из легких, например из водорода. Так как энергия связи элементов, стоящих в начале периодической системы, велика, то это очень перспективная идея. К сожалению, пока она полностью решена только для неуправляемой реакции (водородная бомба). Но работы последнего времени позволяют надеяться на создание управляемых процессов синтеза атомных ядер в обозримом будущем.

б) Второе направление исходит из возможности использования неустойчивости ядер элементов, стоящих в конце периодической системы. Если в такое ядро попадет внешняя частица (нейтрон), приносящая дополнительную энергию, ядро может разделиться на два осколка (ядра элементов из середины периодической системы), причем в ряде случаев происходит выделение значительной энергии, так как энергия связи этих устойчивых ядер больше, чем исходного ядра. Подобные ядерные реакции управляемы, и именно они осуществляются на современных атомных электростанциях, дающих электрическую энергию за счет ядерной.

Подробное рассмотрение этих вопросов читатель найдет в «Оптике и атомной физике».

6.7. СОУДАРЕНИЯ ПРИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СКОРОСТЯХ

Классическая теория соударений, рассмотренная в главе 3, допускает три типа соударений:

1. Чисто неупругое, когда кинетическая энергия переходит во внутреннюю, и частицы образуют одно целое.

2. Чисто упругое, когда кинетическая энергия перераспределяется между частицами, не переходя в другие формы.

3. Соударение, при котором кинетическая энергия частично переходит во внутреннюю, но частицы разлетаются в разные стороны. Последнее встречается чаще всего; нами оно не рассматривалось из-за сложности его анализа.

Но во всех этих случаях масса частиц не изменялась.

При релятивистских скоростях и взаимодействиях выполняются

законы сохранения релятивистского импульса и полной энергии частиц. При этом взаимодействия могут быть столь сильными, что массы частиц будут изменяться.

Например, для чисто неупругого соударения частиц с массами m_{01} и m_{02} , обладающих скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , закон сохранения релятивистского импульса выглядит так:

$$\frac{m_{01}\vec{v}_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_{02}\vec{v}_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta_i = \frac{v_i}{c}. \quad (6.15)$$

Закон сохранения энергии пишется для полной энергии частиц:

$$\frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_{02}c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.16)$$

Разумеется, расчеты при этом усложняются. Мы ограничимся случаем лобового соударения частиц равной массы, имеющих равные (по модулю) скорости \vec{v}_1 . При этом из (6.15) получается:

$$\vec{v} = 0.$$

Уравнение (6.16) позволяет найти массу полученной частицы:

$$m_0 = \frac{2m_{01}}{\sqrt{1-\beta_1^2}} > 2m_{e1}.$$

Она превышает сумму масс исходных частиц, так как в результате соударения увеличивается внутренняя энергия.

Энергия покоя полученной частицы W_0 превышает энергию покоя соударявшихся частиц на величину

$$\Delta W = 2m_{01}c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - 1 \right).$$

Отношение этого прироста к приросту энергии, вычисленному при подобном неупругом ударе (без учета релятивистских поправок) (уравнение 3.5), равно:

$$\gamma = \frac{\Delta W}{m_{01}v_1^2} = \frac{2}{\beta_1^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - 1 \right)$$

и быстро возрастает при $\beta_1^2 \rightarrow 1$. Так, для $\beta_1^2 = 0,25$ получается $\gamma = 1,3$; для $\beta_1^2 = 0,96$ получается $\gamma \approx 8$; для $\beta_1^2 = 0,995$ находим $\gamma \approx 26$.

Когда после соударения остаются две частицы, то следует учитывать, что их массы покоя не должны равняться массам покоя исходных частиц. Действительно, возможен обмен не только кинетической, но и внутренней энергией.

В общем случае такая задача не решается (число уравнений меньше числа неизвестных), если нет дополнительных сведений об условиях взаимодействия при соударении.

В заключение отметим, что законы сохранения импульса и энергии выполняются как при макроскопических процессах, так и при соударениях элементарных частиц вещества друг с другом и с атомами света (фотонами).

Специальная теория относительности, созданная Эйнштейном в 1905 г., в настоящее время часто рассматривается как глава классической механики. Она не только выдержала многочисленные опытные проверки, но и прочно вошла в технику: ядерная энергетика, теория ускорителей заряженных частиц, применение рентгеновских и гамма-излучений — все это требует учета эффектов, предсказываемых СТО.

Специальная теория относительности оказала большое влияние на методологию физики, объединив ранее разрозненные понятия (пространственно-временные отношения, энергию и массу) и отбросив необоснованные представления об абсолютном (не зависимом от материи) характере пространства и времени.

Методы СТО нашли применение и в электродинамике, так как основные уравнения электродинамики подчиняются преобразованиям Лоренца.

7.1. УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ. ЗАКОН ГУКА

В предыдущих главах книги сформулированы основные законы механики и обсуждены области их применения. Остальные главы посвящены более детальному анализу нескольких важных типов движения. Их рассмотрение проводится применительно к нерелятивистским скоростям. Границы применимости результатов обсуждаются в случае необходимости.

В § 1.7—1.9 и 4.6 мы уже познакомились с колебательным движением и простейшими колебательными системами — маятниками. Колебательное движение вызывается упругими силами

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x},$$

пропорциональными смещению и направленными к положению равновесия. Эти силы возникают в твердых телах при их упругой деформации, или они не связаны с деформацией, но проявляются таким же образом (такие силы были названы квазиупругими). Примером квазиупругой силы может служить составляющая силы тяжести, возвращающая физический маятник к положению равновесия.

Прежде чем перейти к более глубокому изучению колебаний, кратко остановимся на основных видах упругих деформаций тел.

При силовом воздействии на любое физическое тело его объем и форма могут измениться. Хорошо известно, что изменение формы жидкости или газа достигается сколь угодно малыми силами — в этих состояниях вещество не обладает упругостью формы. В твердом же состоянии упругость формы велика — для изменения формы твердого тела требуются значительные силы.

Но во всех агрегатных состояниях вещество обладает значительной упругостью объема — для его изменения требуются более или менее значительные силы. Газы обладают упругостью объема при сжатии. Но они самопроизвольно занимают сколь угодно большой предоставленный им объем. Это объясняется беспорядочным движением молекул газа, не имеющих определенных положений равновесия. В твердом теле частицы занимают определенные положения равновесия (точнее, хаотически колеблются около них), образуя так называемую кристаллическую решетку. При растяже-

нии тела проявляются силы сцепления между его частицами; при сжатии на первый план выступают силы отталкивания; в обоих случаях твердое тело сопротивляется изменению объема. Силы притяжения и отталкивания различно зависят от расстояния; в состоянии равновесия тела сумма этих сил равна нулю.

Примерная зависимость сил притяжения $F_{пр}$ и отталкивания $F_{от}$ от расстояния для случая двух молекул (одна из них находится в начале координат, другая — на расстоянии ρ) показана на рисунке 7.1; положению равновесия соответствует расстояние ρ_0 .

Имея кристаллическую решетку, твердое тело должно быть анизотропным, так как равновесные расстояния между частицами в разных направлениях различны. Однако многие интересные для техники материалы не являются монокристаллами (макроскопическими единичными кристаллами). Они состоят из множества микрокристаллов, беспорядочно расположенных в теле (поликристаллические тела). При этом анизотропия сглаживается, и такие материалы оказываются практически однородными и изотропными.

В жидкости также отчетливо проявляются силы сцепления и отталкивания, хотя положения равновесия частиц жидкости не так определены, как в твердом теле.

В этой главе будут рассмотрены упругие свойства твердых тел, при этом мы совершенно не будем касаться природы упругих сил, возникающих в теле, и законов, определяющих величину этих сил. Не учитывается также и влияние случайных неоднородностей, всегда имеющих в реальных кристаллах.

Теория упругости оперирует со значениями модулей различных деформаций, но в ее задачи совершенно не входит объяснение причин, по которым какой-либо модуль имеет то или иное численное значение. Объяснение этого относится к области молекулярной

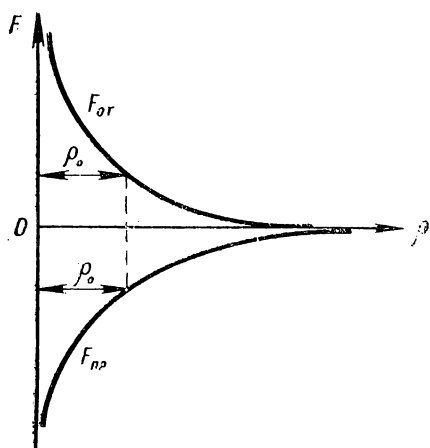


Рис. 7.1

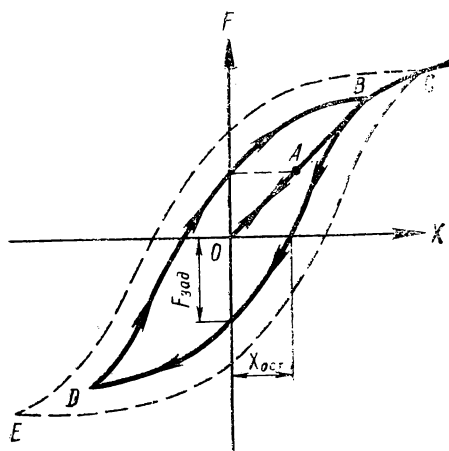


Рис. 7.2

физики и требует довольно обширных сведений о междумолекулярных силах. Мы вернемся к этому вопросу в последнем разделе курса, где будут освещены идеи современной физики твердого состояния.

Опыт показывает, что между внешней силой и создаваемой ею деформацией существуют сложные связи. Так, при растяжении прямого стержня сечением S и длиной h при малых силах удлинение x пропорционально силе F (участок OA кривой на рис. 7.2). Если начиная с некоторого значения уменьшать силу, то тело проходит через прежние состояния (AO) и после прекращения действия силы восстанавливает начальную длину. Такие деформации называют *упругими*.

Полная работа сил упругости за цикл OAO равна нулю, и внутренняя энергия тела не изменяется. С такими деформациями, когда после прекращения действия силы деформация полностью исчезает, мы уже встречались при рассмотрении абсолютно упругого соударения тел (см. § 3.1).

Но сказанное верно лишь до определенного предела, называемого *пределом упругости* (точка A). При больших силах деформация начинает расти быстрее силы (участок AC). Если, дойдя до состояния B , начать уменьшать силу, то тело не проходит уже через прежние состояния, деформация «отстает» от силы; при нулевой силе существует остаточная деформация $x_{ост}$; ее можно уничтожить, приложив силу противоположного направления, равную $F_{зад}$, иногда называемую «задерживающей силой».

При дальнейших изменениях силы получается зависимость, изображаемая кривой BDB ; увеличивая силу, мы снова приходим к состоянию B . Это явление — запаздывание деформации относительно силы — называется «механическим гистерезисом». Можно показать, что площадь петли гистерезиса BDB служит мерой работы, затраченной при получении петли; эта работа идет на увеличение внутренней энергии тела — оно нагревается. Если первоначальное растяжение происходило до состояния, изображаемого точкой C , а затем сила уменьшилась, то состояния тела изображаются кривой CE ; при последующем увеличении силы получается верхняя кривая EC и петля замыкается.

Неупругие деформации существуют до *предела прочности* $F_{пр}$. После превышения последнего деформация непрерывно растет (без увеличения силы), и в конце концов тело разрывается в одном из сечений, случайно оказавшемся более слабым, чем другие.

Далее нас будут интересовать лишь упругие деформации, так как только в этом случае, как ясно из рисунка 7.2, имеется пропорциональность между приложенной силой и соответствующей деформацией.

Деформацию испытывает каждый элемент длины тела, а внешняя сила действует на все его сечение, поэтому более содержательно рассматривать *относительную деформацию* (например, удлинение $\epsilon = \frac{x}{h}$) и силу, действующую на единицу площади сечения.

Представим сечение вектором \vec{S} , направленным по внешней нормали к сечению; модуль вектора принимается равным площади сечения S . Тогда между силой \vec{F} , вызывающей деформацию, и сечением существует соотношение:

$$\vec{F} = \sigma \vec{S},$$

где скалярная величина σ , называемая *напряжением*, характеризует деформацию лучше, чем сила \vec{F} . Действительно, если мысленно выделить некоторый элемент деформированного тела, то, поскольку он находится в равновесии, на него со стороны соседних слоев действуют равные и противоположные силы. Поэтому в каждой точке тела существует напряжение σ .

Напряжение измеряется в п а с к а л я х (Па). Оно положительно при растяжении тела и отрицательно при сжатии.

Так как при упругих деформациях внешняя сила

$$\vec{F} = k\vec{x}, \quad (7.1)$$

то ее можно представить в виде:

$$\sigma \vec{S} = k h \vec{\epsilon}$$

(векторы $\vec{\epsilon}$ и \vec{x} сонаправлены с вектором \vec{S}). Введя обозначение

$$E = k \frac{h}{S},$$

получаем:

$$\sigma = E \epsilon, \quad (7.2)$$

где постоянная E — *модуль продольного растяжения* (или *модуль Юнга*) — не зависит от размеров тела, но определяется только свойствами материала. E измеряется в тех же единицах, что и σ .

Из сказанного стал ясен смысл термина «жесткость» применительно к стержню:

$$k = \frac{ES}{h};$$

жесткость определяется материалом стержня (E) и отношением его нормального сечения к длине $\left(\frac{S}{h}\right)$.

Уравнения (7.1) и (7.2) представляют собой закон упругих деформаций — так называемый *закон Гука*, полученный эмпирически и сформулированный в XVII в.

Обычно при построении петли гистерезиса по осям откладывают относительную деформацию ϵ и напряжение σ (на рис. 7.1 были отложены пропорциональные им величины x и F).

При растяжении сечение тела сокращается. Это можно показать на опыте.

На вертикальный резиновый шнур плотно надета металлическая шайба; при растяжении стержня она соскальзывает вниз. Это и свидетельствует об уменьшении поперечного сечения шнура. Что же касается изменения объема, то, как показывает опыт, он при растяжении всегда увеличивается. Обсудим это. Пусть стержень имеет круговое сечение радиусом ρ . Поперечной деформацией при растяжении называют величину

$$\varepsilon_{\text{поп}} = \frac{\Delta \rho}{\rho}. \quad (7.3)$$

Изменение объема при растяжении такого цилиндра составляет:

$$\Delta V = \pi \rho^2 h [(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon_{\text{поп}})^2 - 1] = \pi \rho^2 h (\varepsilon - 2\varepsilon_{\text{поп}}),$$

так как вторыми степенями малых относительных деформаций можно пренебречь.

Отношение $\frac{\varepsilon_{\text{поп}}}{\varepsilon}$ называют *коэффициентом Пуассона* μ .

Так как $\Delta V > 0$, то всегда выполняется неравенство:

$$\mu < 0,5. \quad (7.4)$$

У большинства материалов μ близко к 0,5, и показать на опыте малые изменения объема трудно; однако у пробки μ весьма близко к нулю. Поэтому, поместив пробку в герметический сосуд, соединенный с манометром, и сжимая ее, легко обнаружить уменьшение давления в сосуде, доказывающее, что объем пробки сократился.

Кроме указанных выше понятий, применяются еще две характеристики упругих материалов: *предел упругости* $\sigma_{\text{упр}}$ — максимальное напряжение, при котором деформация еще остается упругой, и *предел прочности* $\sigma_{\text{пч}}$ — напряжение, при котором возникает текучесть материала, приводящая к его разрыву.

Упругие характеристики для стали и свинца приведены в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

	$\sigma_{\text{упр}}$, Па	$\sigma_{\text{пч}}$, Па	E , Па
Сталь . . .	$3,3 \cdot 10^8$	$7,5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{11}$
Свинец . .	$1,6 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{10}$

Отметим важную особенность малых деформаций. Для них характерно, что упругие напряжения σ и деформации ε возникают таким образом, как если бы других напряжений и деформаций не было, т. е. они подчиняются принципу суперпозиции, о котором впервые шла речь в главе 2. Это можно рассматривать либо как опытный факт, либо как следствие линейности уравнений, связывающих силы и смещения при упругой деформации. При воздей-

ствии больших сил, когда $\sigma > \sigma_{\text{уп}}$, принцип суперпозиции неприменим.

В частности, именно принцип суперпозиции был нами использован при вычислении изменения объема в случае растяжения цилиндра: возникновения продольной ε и поперечной $\varepsilon_{\text{поп}}$ деформаций мы считали независимыми. Можно показать, что любые упругие деформации всегда могут быть сведены к простейшим, и характерные для них упругие постоянные могут быть выражены через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ ; последние тем самым полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала.

Рассмотрим теперь некоторые другие типы деформаций. При всестороннем сжатии (эта деформация осуществима как для твердого тела, так и для жидкости или газа) относительное изменение объема V есть:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\sigma}{\beta}, \quad \sigma < 0. \quad (7.5)$$

Модуль объемного сжатия β всегда бывает несколько меньше, чем модуль Юнга.

Деформация сдвига (рис. 7.3) создается силой \vec{F} , действующей вдоль верхней грани тела, имеющего закрепленную нижнюю грань. Она характеризуется углом сдвига, для которого выполняются соотношения:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\tau}{G},$$

где τ — касательное напряжение, G — модуль сдвига. Можно показать, что $G \geq 0,5 E$.

Практический интерес имеет деформация кручения. По существу, это тот же сдвиг, возникающий в цилиндре, имеющем закрепленное основание, при действии на другое основание вращающего момента M . При упругом кручении нити длиной h и радиусом ρ угол закручивания нижнего основания равен:

$$\varphi_M = \frac{M}{D},$$

где модуль кручения

$$D = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^4}{h} G.$$

Поэтому в приборах для измерения очень малых вращающих моментов применяются очень тонкие длинные нити.

Более сложна деформация изгиба, характеризующаяся «стрелой прогиба» x (рис. 7.4), т. е. наибольшим смещением из положения равновесия. Для стержня, имеющего прямоугольное сечение, степень деформации существенно зависит от того, вдоль какой стороны сечения действует деформирующая сила. Если поперечное

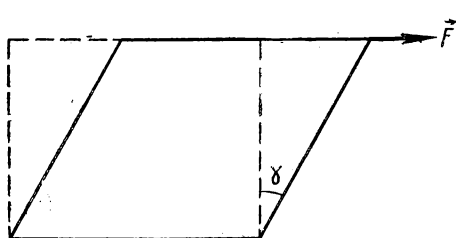


Рис. 7.3

сечение $S=ab$ и сила действует вдоль стороны b , то стрела прогиба

$$x = A \frac{h^2}{ab^3} \frac{M}{E},$$

где M — момент силы относительно оси, проходящей через закрепленное поперечное сечение стержня перпендикулярно его длине; безразмерный коэффициент пропорциональности A зависит от условий закрепления.

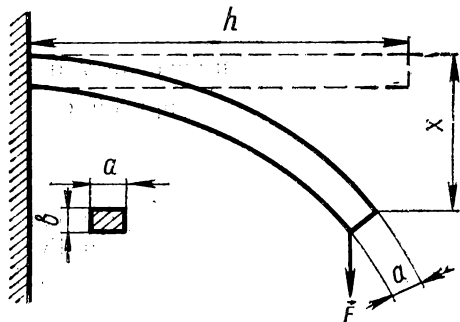


Рис. 7.4

Влияние формы сечения легко показать на двух примерах. Тонкая стальная линейка, закрепленная одним концом (как на рис. 7.4), прогибается под действием собственной силы тяжести, если вертикально расположена узкая сторона сечения. Но она выдерживает без заметного

прогиба груз, в несколько раз превышающий ее силу тяжести, если вертикально расположена широкая сторона сечения.

Так как при изгибе верхние слои стержня растягиваются, а нижние — сжимаются, то где-то посередине имеются слои, совсем (или почти совсем) не подвергающиеся деформации. Очевидно, их можно удалить, не влияя на деформацию и прочность стержня при изгибе. При этом получается экономия материала. В технике сплошные стержни часто заменяются полыми трубами. Любопытно, что в процессе приспособления природа создала кости в виде трубок, а не в виде сплошных стержней.

7.2. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ.

ВЕКТОР УМОВА

При деформации за счет работы A внешней силы \vec{F} в каждом элементе объема запасается энергия деформации. Найдем плотность этой энергии ω для случая растяжения:

$$\omega = \frac{A}{hS} = \frac{\int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x}}{hS} = \frac{kx^2}{2hS} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}. \quad (7.6)$$

Мы здесь пренебрегли изменением объема при деформации, так как оно относительно мало. Плотность энергии оказалась пропорциональной квадрату относительной деформации.

Легко убедиться, что энергия упругой деформации составляет ничтожную долю полной энергии тела. Так, если довести сталь до предела упругости, то плотность энергии деформации составит всего:

$$w = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{упр}}^2}{E} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3,$$

а полная энергия единицы объема (до деформации) составляла (при плотности $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$):

$$w_0 = \rho c^2 = 7 \cdot 10^{20} \text{ Дж/м}^3,$$

т. е. была примерно в 10^{15} раз больше.

Тем не менее именно наличием дополнительной энергии у тела, деформированного силой \vec{F} , объясняется развитие упругой силы:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}, \quad (7.7)$$

противонаправленной равному по модулю внешнему воздействию.

Даже для очень малых деформаций реальных тел закон Гука выполняется только приближенно: абсолютно упругих деформаций в природе не бывает, это идеализация.

Пусть, например, напряжение $\sigma = \sigma(\epsilon)$ — некоторая однозначная функция относительного удлинения ϵ . Тогда в разложении $\sigma(\epsilon)$ в ряд по степеням ϵ отсутствует нулевой член, так как при $\epsilon = 0$ $\sigma = 0$ (с исчезновением деформаций напряжение исчезает). Поэтому

$$\sigma = E\epsilon + \alpha\epsilon^2 + \beta\epsilon^3 + \dots,$$

где коэффициенты α, β, \dots — постоянные, зависящие от материала стержня.

Если относительное удлинение ϵ столь мало, что высшими степенями ϵ можно пренебречь, тогда и получается закон Гука (7.2). При этом относительная ошибка при его использовании составляет:

$$\frac{\alpha\epsilon^2}{E\epsilon} \sim \epsilon.$$

В заключение рассмотрим глубокую идею Н. А. Умова о течи энергии при механических процессах. Хотя в механике ею пользуются редко, в электродинамике подобная идея оказалась очень плодотворной.

Если требуется привести в движение некоторое тело 1 (рис. 7.5), то это можно осуществить либо при помощи тяги его со стороны тела 2, либо путем толкания его телом 3.

Пусть мгновенная скорость тел \vec{v} направлена вправо. Это направление считаем положительным. Движущая сила \vec{F} направлена

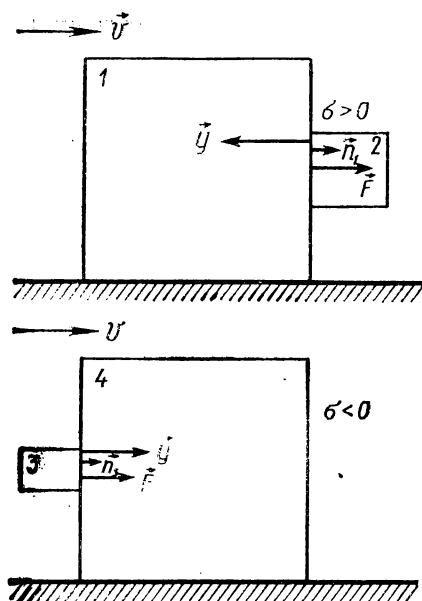


Рис. 7.5

так же. Элементарная работа этой силы за время dt равна:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Площадь соприкосновения тел назовем S_1 . Тогда силу \vec{F} можно представить в виде:

$$\vec{F} = \sigma \vec{S}_1,$$

причем, как и раньше, здесь площадь характеризуется вектором \vec{S}_1 , направленным в сторону внешней нормали \vec{n}_1 .

Тогда работа силы будет равна:

$$dA = \sigma \vec{v} \cdot \vec{S}_1 dt = -\vec{y} \cdot \vec{S}_1 dt > 0,$$

где вектор

$$\vec{y} = -\sigma \vec{v}, \quad (7.8)$$

характеризующий поток энергии, называется *вектором Умова*. Он отрицателен при тяге, положителен при толчке, т. е. всегда направлен в сторону тела, приводимого в движение

Так как тело 1 действует на тела 2 и 3 силой

$$\vec{F}_1 = -\vec{F},$$

то работа этого тела будет отрицательной.

Вектор Умова дает весьма наглядное представление об обмене энергией взаимодействующих тел. Но, конечно, процесс взаимодействия, включающий в себя обмен энергией, не исчерпывается только этим обменом. Мы воспользуемся представлением о потоке энергии при изучении волновых движений как в механике, так и в электродинамике (где этот вектор применяется наиболее часто), а также в оптике.

7.3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Если на твердое тело подействовать силой, которая приведет к появлению в нем упругой деформации, а затем быстро снять деформирующее усилие, то возникнут колебания. Созданные в результате воздействия упругие силы, стремящиеся вернуть частицы тела в положение равновесия, не могут при снятии напря-

жения исчезнуть сразу. Каждая частица тела под воздействием упругой силы

$$\vec{F}_{\text{уп}} = -k\vec{x},$$

дойдя до положения равновесия, будет обладать конечной скоростью (энергия упругой деформации переходит в кинетическую), поэтому и пройдет положение равновесия по инерции. По мере дальнейшего движения будет увеличиваться отклонение от положения равновесия в противоположную сторону; пропорционально смещению будет возрастать антинправленная ему сила упругости, которая была равна нулю при прохождении положения равновесия. При этом, например, растяжение будет заменяться сжатием. Затем процесс повторится в противоположном направлении. В отсутствие трения колебания продолжались бы сколь угодно долго (см. § 4.6). Наличие трения приводит к тому, что часть энергии колебаний переходит во внутреннюю энергию (тело нагревается), наибольшие смещения от положения равновесия со временем уменьшаются, и колебания постепенно прекращаются.

Таким образом, к колебательному движению приводят силы упругости, возвращающие частицы тела к положению равновесия, и наличие инерции у частиц.

Колебания, возникающие при действии на систему постоянной (или действующей кратковременно) внешней силы, называются *свободными колебаниями*. Если внешняя сила периодична и действует достаточно долго (точный смысл сказанного станет ясен из дальнейшего), то в системе могут установиться вынужденные колебания (см. § 7.5).

Запишем уравнение движения в случае простейшей упругой деформации — продольного растяжения (сжатия). Пусть на частицу массой m , смещенную из положения равновесия на \vec{x} , действует внешняя сила $\vec{F}_{\text{вн}}$, сонаправленная со смещением. Тогда уравнение движения в соответствии со сказанным имеет вид:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\text{вн}} + \vec{F}_{\text{уп}} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (7.9)$$

В случае упругой деформации $\vec{F}_{\text{уп}} = -k\vec{x}$. Законы трения могут быть различны (см. главу 3). Мы здесь ограничимся простым, но очень важным в практическом отношении случаем трения, когда сила трения пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\dot{\vec{x}},$$

где r — коэффициент трения — постоянная положительная величина; так характеризуется жидкое трение при не слишком больших скоростях движения.

Тогда уравнение движения (7.9) можно записать в виде:

$$m\ddot{\vec{x}} + r\dot{\vec{x}} + k\vec{x} = \vec{F}_{\text{вн}}. \quad (7.10)$$

Рассматриваемая задача одномерна, поэтому уравнение (7.10) можно переписать в скалярной форме:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{\text{вн}}. \quad (7.11)$$

Полученное уравнение полностью совпадает с уравнением движения пружинного маятника (§ 4.5), если учесть имеющуюся силу трения. Это естественно, так как фактически нами решается та же задача. Важнее другое. Убедимся, что по форме уравнение (7.11) типично для любой колебательной системы (маятника) с одной степенью свободы.

Уравнение движения (4.10) с учетом трения для крутильного маятника имеет вид:

$$I_1\ddot{\varphi} + r_1\dot{\varphi} + D\varphi = M_{\text{вн}}, \quad (7.12)$$

где I_1 — момент инерции маятника относительно оси вращения, φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ — угловые смещение, скорость и ускорение, D — коэффициент кручения, $M_{\text{вн}}$ — момент внешних сил.

Аналогичными являются уравнения движения для систем, колеблющихся под действием квазиупругих сил, например:

для математического маятника длиной l (при малых углах отклонения φ):

$$I_2\ddot{\varphi} + r_2\dot{\varphi} + mgl\varphi = M_{\text{вн}}, \quad (7.13)$$

где $I_2 = ml^2$,

для физического маятника:

$$I_3\ddot{\varphi} + r_3\dot{\varphi} + mga\varphi = M_{\text{вн}}, \quad (7.14)$$

где a — расстояние от оси до центра тяжести.

Видно, что уравнения (7.12—7.14) математически одинаковы. Это, как и (7.11), неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, правая часть которых характеризует внешнее воздействие (силу или момент силы при вращении системы).

У членов левой части коэффициентами при переменных являются константы, определяющие соответственно инерцию тела (m и I), потери на трение (r), упругость (k и D) или «квазиупругость» (mgl и mga).

Сходство уравнений для колебательных систем выходит далеко за пределы механики. Например, рассмотрим электрическую цепь, где к внешнему источнику ЭДС $\mathcal{E}_{\text{вн}}$ подключены последовательно соединенные катушка индуктивностью L , резистор сопротивлением R , конденсатор емкостью C . Мгновенное значение заряда конденсатора обозначим q ; скорость его изменения $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$ определяет ток i в контуре; скорость изменения тока

$$-L \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2} L$$

определяет ЭДС самоиндукции, возникающую в катушке, обладающей индуктивностью L . Тогда $L\ddot{q}$ — разность потенциалов, поддерживаемая на катушке, iR — разность потенциалов на резисторе (закон Ома), $\frac{q}{C}$ — разность потенциалов на конденсаторе. Сумма этих разностей потенциалов в каждый момент равна внешней ЭДС $\mathcal{E}_{\text{вн}}$. Таким образом, получается:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_{\text{вн}}, \quad (7.15)$$

что аналогично уравнению (7.11). При этом устанавливаются электромеханические аналогии следующих величин:

$$\begin{aligned} L &\sim m; & q &\sim x; & F_{\text{вн}} &\sim \mathcal{E}_{\text{вн}}. \\ R &\sim r; & \dot{q} &\sim \dot{x}; \\ \frac{1}{C} &\sim k; & \ddot{q} &\sim \ddot{x}; \end{aligned}$$

Эта формальная аналогия основана на физической схожести процессов. При колебаниях маятника его кинетическая энергия переходит в потенциальную, причем часть энергии необратимо теряется из-за существования трения, переходя во внутреннюю энергию маятника и окружающей среды. При разряде конденсатора запасенная в нем электрическая энергия переходит в магнитную энергию тока (и обратно), частично переходя необратимо во внутреннюю энергию проводников, нагреваемых током.

В дальнейшем, при анализе электрических явлений, мы убедимся в верности результатов, получаемых на основании электромеханической аналогии. Сейчас же это дает нам право при необходимости иллюстрировать результаты из механики соответствующими электрическими явлениями (наблюдение которых во многих случаях более удобно и наглядно).

7.4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ.

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ.

ДОБРОТНОСТЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим особенности колебаний в отсутствие внешних сил ($\vec{F}_{\text{вн}}=0$), т. е. свободных колебаний, на примере пружинного маятника. В этом случае уравнение движения (7.11) можно записать в виде:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0, \quad (7.16)$$

где m — масса тела, находящегося на конце пружины с жесткостью k .

Если трения нет ($r=0$, $r\dot{x}=0$), его решением являются гармонические колебания:

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.17)$$

изученные нами в § 4.6. Будем называть их, в отличие от свободных колебаний (с учетом трения), *собственными*. Напомним, что в соответствии с § 4.6 частота собственных колебаний равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (7.18)$$

а амплитуда и начальная фаза могли быть определены, если кроме уравнения движения задавались два значения смещения или скорости в произвольные моменты времени.

Мгновенное значение кинетической энергии оказывалось равным:

$$W_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2 \left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right),$$

а потенциальной энергии —

$$W_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2 (\omega_0 t + \varphi_0).$$

Так что полная энергия, равная:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2} k X_m^2, \quad (7.19)$$

не зависела от времени. Такие колебания, однажды возникнув, должны длиться неопределенно долго — мы называли их незатухающими. Но тогда же было подчеркнуто, что представление о незатухающих колебаниях — идеализация, так как в действительности всегда существует трение, вызывающее потерю энергии и постепенное уменьшение амплитуды колебаний. Теперь мы учтем это обстоятельство.

Простое наблюдение за колебаниями маятника, имеющего на стержне два крыла (рис. 7.6), которые можно сначала расположить в плоскости колебаний, потом — перпендикулярно ей, показывает, что в первом случае колебания происходят длительное время без заметного уменьшения амплитуды, а во втором — амплитуда заметно падает уже за время нескольких колебаний. Дело в том, что воздух оказывает во втором случае более сильное сопротивление, чем в первом. Если записать зависимость смещения от времени (практически это лучше сделать, записав на осциллографе затухающие электрические колебания; в соответствии с отмеченной выше (§ 7.3) электромеханической аналогией закон затухания должен быть одинаков), то получатся кривые, изображенные на рисунке 7.7¹. Подобные колебания называются затухающими.

¹ У каждой кривой указано значение добротности Q . Физический смысл этой величины разъяснен в конце параграфа.

Затухание может быть вызвано разными причинами. Так, маятник, представляющий массивную медную пластину на стержне, колеблется в воздухе без заметного затухания. Но если он движется между полюсами электромагнита, то в меди возникают индукционные токи. По правилу Ленца, они противодействуют вызвавшей их причине (а эта причина — движение маятника); поэтому при взаимодействии этих токов с магнитным полем электромагнита возникают тормозящие силы; кинетическая энергия маятника расходуется на нагревание меди и постепенно уменьшается. Усиливая магнитное поле (сближением полюсов электромагнита или увеличением тока в его обмотках), можно добиться очень сильного затухания — движение может даже потерять периодический характер, стать аperiодическим.

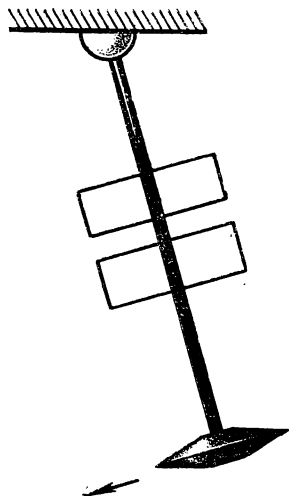


Рис. 7.6

Нас, однако, в первую очередь будут интересовать условия, когда периодичность движения сохраняется, а коэффициент трения остается постоянным, т. е. сила трения пропорциональна скорости.

Вернемся к уравнению свободных колебаний маятника (7.16), где трение учтено, и перепишем его, введя стандартные обозначения

$$\frac{r}{m} = 2\alpha, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (7.20)$$

в виде:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.21)$$

Не имея возможности дать здесь строгое решение дифференциального уравнения (7.21), мы пойдем путем, несколько искусственным, но более доступным читателю.

Рассматривая кривые (рис. 7.7), являющиеся графиками искомого решения, замечаем, что наибольшие отклонения (одного знака) монотонно убывают со временем. Обозначим через X_m начальное отклонение, а через X — амплитуду одного из последующих смещений. Можно предположить, что убыль наибольших отклонений пропорциональна их значению и времени:

$$-dX = pXdt,$$

где p — постоянная. Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dX}{X} = -pdt.$$

Интегрирование правой части от нуля до t , а левой от X_m до X приводит к результату:

$$X = X_m \exp(-pt). \quad (7.22)$$

Но так как движение обладает повторяемостью, то можно предположить, что решение уравнения (7.21) имеет вид:

$$x = X_m \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (7.23)$$

Если это предположение верно, то при подстановке x и его производных в (7.21) должно получиться тождество.

Сначала найдем производные:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -X_m p \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - \\ &\quad - X_m \omega_1 \exp(-pt) \sin(\omega_1 t + \varphi_0); \\ \ddot{x} &= X_m p^2 \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - \\ &\quad - X_m \omega_1^2 \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \\ &\quad + 2X_m p \omega_1 \exp(-pt) \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

При подстановке в (7.21) множители $X_m \exp(-pt)$ сократятся и останется:

$$\begin{aligned} p^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - \omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + 2p\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) - \\ - 2\alpha p \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - 2\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + \\ + \omega_0^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Это тождество должно выполняться в любой момент. Пусть $\omega_1 t + \varphi_0 = 0$. Тогда должно быть:

$$p^2 - \omega_1^2 - 2\alpha p + \omega_0^2 = 0. \quad (7.24)$$

Если же $\omega_1 t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, то

$$2p\omega_1 - 2\alpha\omega_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p = \alpha. \quad (7.25)$$

Учитывая (7.25), получаем из (7.24):

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2. \quad (7.26)$$

Так как ω_1 — частота свободных колебаний (действительная величина), то необходимо выполнение еще одного условия:

$$\omega_0 > \alpha. \quad (7.27)$$

Итак, решением уравнения (7.21) является выражение:

$$x = X_m \exp(-\alpha t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (7.28)$$

Величины X_m и φ_0 могут быть определены, если будут известны два значения смещения (или скорости) в произвольные моменты времени (так называемые начальные условия).

Решение (7.28) легко получается при помощи метода комплексных амплитуд (см. § 7.6).

Из уравнения (7.28) следует, что затухание сказывается и на амплитуде и на частоте — последняя, как и следовало ожидать,

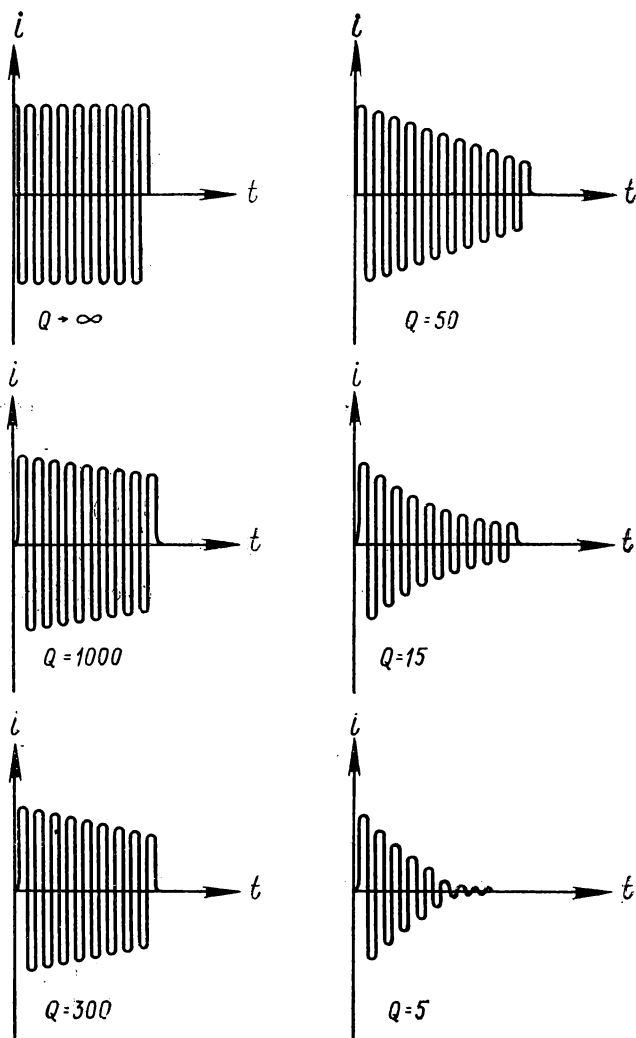


Рис. 7.7

несколько уменьшилась. Однако во многих практических случаях, когда трение мало, этим влиянием на частоту можно пренебречь и приближенно считать частоту свободных колебаний ω_1 равной частоте собственных колебаний ω_0 . Иногда говорят, что решение (7.28) описывает затухающие гармонические колебания. Это неверно. Хотя периодичность движения сохранилась, но о гармоничности говорить уже не приходится.

На рисунке 7.8, а изображен временной ход затухающего процесса, где удастся проследить около тридцати колебаний. Резуль-

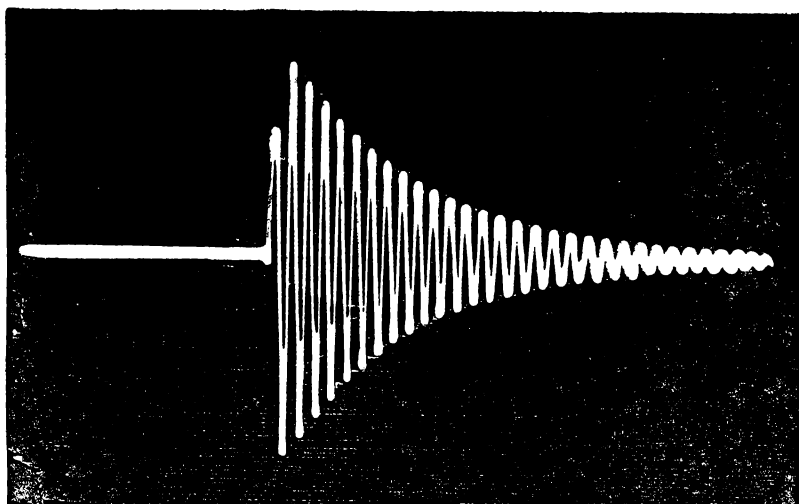


Рис. 7.8, а

тат гармонического анализа этого процесса показан на рисунке 7.8, б (по оси абсцисс отложены частоты, по оси ординат — соответствующие амплитуды). Как видно, эти затухающие колебания имеют практически непрерывный спектр (максимальная амплитуда соответствует частоте ω_0).

Выражение (7.28) обладает замечательной особенностью. Найдем отношение двух последующих смещений, отделенных промежутком времени, равным

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} :$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \exp(\alpha T_1) = \text{const.}$$

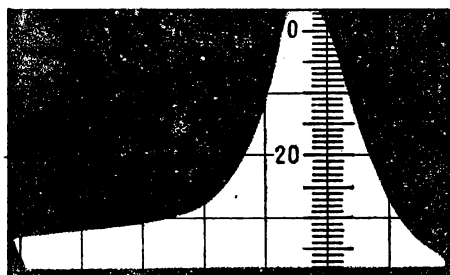


Рис. 7.8, б

Это отношение называется *декрементом затухания*, а

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \alpha T_1 \approx \alpha T_0 = \delta — \quad (7.29)$$

логарифмическим декрементом затухания.

Логарифмический декремент затухания — постоянная для данной колебательной системы величина.

Наряду с декрементом пользуются понятием *добротности* Q :

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_0}{2\alpha}. \quad (7.30)$$

Можно показать, что добротность пропорциональна отношению полной энергии W колебательной системы к энергии W_{π} , теряемой за период:

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_{\pi}}.$$

Условимся считать, что затуханием можно пренебречь, если процесс изучается в течение времени, пока амплитуда уменьшится, например, до 0,8 своего начального значения. Число колебаний n , совершаемых в этих условиях, находится из соотношения:

$$\frac{X_1}{X_{n+1}} = \exp(\alpha T_0 n) = \exp\left(\frac{\pi}{Q} n\right) = 1,25.$$

Откуда

$$n = \frac{0,23}{\delta} = 0,075Q. \quad (7.31)$$

С другой стороны, если считать, что колебания практически прекратились, когда амплитуда упадет до 0,1 ее начального значения, то число колебаний, совершаемых системой до ее практического успокоения, окажется равным:

$$N = \frac{2,3}{\delta} = 0,75Q. \quad (7.32)$$

Приведем несколько примеров.

Хороший камертон имеет добротность $Q \approx 3000$; если он поставлен на резонансный ящик (при этом увеличивается доля энергии, теряемой на «излучение» — создание звука в окружающем воздухе), добротность падает в несколько десятков раз.

Маятник, при помощи которого хорошо демонстрируется опыт Фуко, имеет добротность порядка нескольких сотен.

Добротность маятника с крыльями, описанного выше, не превышает десяти (когда крылья перпендикулярны плоскости колебаний). Добротность электрических колебательных систем может достигать значений порядка 10^4 ; добротность атома, который тоже является колебательной системой, достигает 10^6 — 10^7 .

Добротность можно представить и таким образом:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{r} = \frac{\rho}{r}. \quad (7.33)$$

Величина ρ имеет ясный физический смысл: она равна отношению амплитуды упругой силы kX_m к амплитуде скорости $\omega_0 X_m$:

$$\rho = \frac{k}{\omega_0} = \sqrt{km}. \quad (7.34)$$

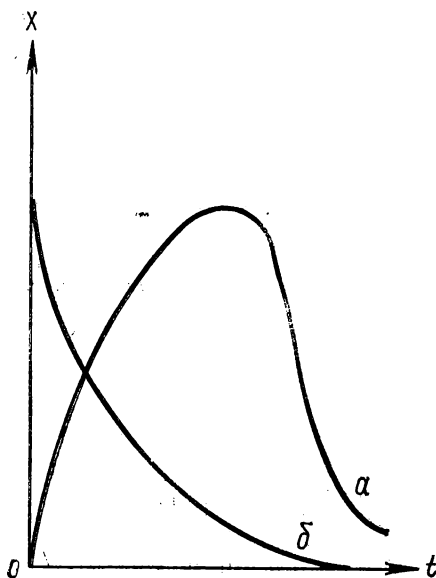


Рис. 7.9

Эта важная характеристика системы называется *волновым* или *колебательным сопротивлением*.

До сих пор мы предполагали, что затухание невелико, так что выполняется неравенство:

$$\omega_0 > \alpha;$$

если этого нет и затухание так велико, что $\omega_0 \leq \alpha$, то движение теряет периодический характер. Мы не будем аналитически исследовать этот случай и ограничимся лишь двумя замечаниями.

Если система выводится из положения равновесия толчком (т. е. ей сообщается кинетическая энергия), то она движется от положения равновесия до некоторого наибольшего отклонения (рис. 7.9, кривая *а*), а

затем асимптотически приближается к положению равновесия.

Если систему предварительно вывести из положения равновесия, сообщив ей потенциальную энергию, а затем предоставить самой себе, то она также постепенно возвращается в положение равновесия (рис. 7.9, кривая *б*).

Можно показать, что для быстреего приближения системы к положению равновесия должно выполняться условие $\omega_0 = \alpha$.

7.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Затухающие колебания происходят под действием сил, характерных для колебательной системы, — силы упругости и силы трения. Эти колебания присущи системе, как таковой. Для практики же особый интерес представляет возможность возбуждения незатухающих колебаний с помощью внешних сил.

В этом случае для маятника, на примере которого мы ведем аналитическое рассмотрение, уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{\text{вн}}. \quad (7.35)$$

Если внешняя сила $F_{\text{вн}}$ постоянна, то она лишь смещает положение равновесия на отрезок, равный:

$$X_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{вн}}}{k},$$

и колебания происходят вокруг этого положения. При этом потенциальная энергия системы после прекращения затухающих колебаний равна:

$$W_p = \frac{1}{2} k X_{\text{ст}}^2 = \frac{1}{2} F_{\text{вн}} X_{\text{ст}},$$

т. е. составляет только половину работы $A = F_{\text{вн}} X_{\text{ст}}$, совершенной внешней силой. Вторая половина работы расходуется на преодоление силы трения.

Более интересно движение, возникающее под действием периодической внешней силы. Его называют *вынужденными колебаниями*

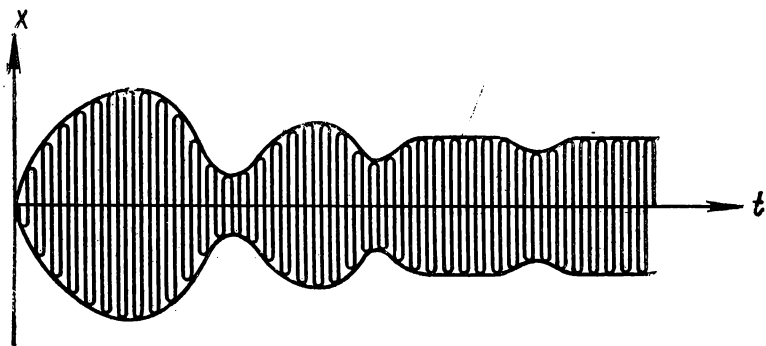


Рис. 7.10

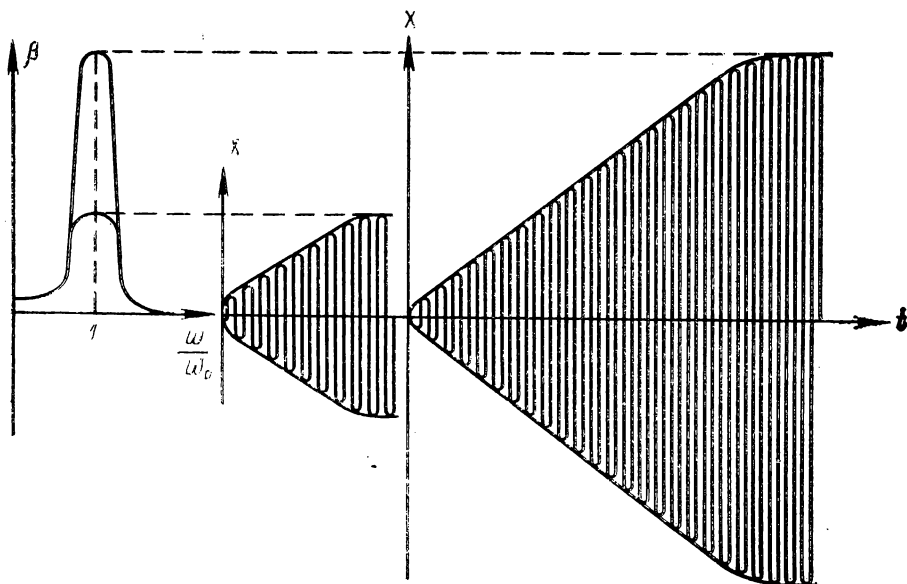


Рис. 7.11

системы. Мы будем считать внешнюю силу меняющейся по гармоническому закону:

$$F_{\text{вн}} = F_m \cos \omega t.$$

Вводя прежние обозначения, перепишем уравнение (7.35) в виде:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t; \text{ где } B = \frac{F_m}{m}. \quad (7.36)$$

Физически очевидно, что под действием периодической силы должны возникнуть колебания с частотой изменения этой силы ω . Однако опыт показывает, что они устанавливаются лишь постепенно. На рисунке 7.10 показана запись установления процесса вынужденных колебаний при $\omega \neq \omega_0$, а на рисунке 7.11 — при $\omega = \omega_0$ (для двух разных значений добротности при одной и той же амплитуде внешней силы). В последнем случае характерно монотонное нарастание амплитуды со временем, увеличение длительности процесса установления и рост амплитуды при увеличении добротности. (О кривых в левой части рисунка будет сказано в конце параграфа.)

Возникновение вынужденных колебаний удобно наблюдать на таком простом приборе. Волчок укреплен в кольце, к которому приварена пластина, несущая ряд плоских пружин разной длины (частоты их собственных колебаний растут при укорочении пружины). Волчок приводят в быстрое вращение; так как его центрирование неидеально, то он оказывает периодическое воздействие на пластину и приводит пружины в вынужденные колебания. Из-за трения частота вращения волчка (и, следовательно, частота возбуждения пружин) непрерывно убывает. Начальная частота вращения волчка должна превышать собственные частоты всех пружин. В этом случае пружины сначала покоятся, а затем поочередно (начиная с самой короткой) возбуждаются. В каждый момент одна из пружин колеблется сильнее всех; ее ближайшие соседки справа и слева колеблются слабее; более далекие колеблются совсем слабо или покоятся. Наибольшее возбуждение постепенно переходит ко все более длинным пружинам; потом они все успокаиваются, хотя волчок еще вращается — частота его вращения стала меньше собственной частоты самой длинной пружины.

Из этих наблюдений следует, что вынужденное движение носит колебательный характер и амплитуда зависит от соотношения между вынуждающей и собственной частотами.

Процессом установления вынужденных колебаний мы здесь интересоваться не будем, — это будет сделано при изучении электрических колебаний. Сейчас же займемся исследованием установившихся колебаний. Предположим, что решением уравнения (7.36) является выражение:

$$x = X_m \cos(\omega t - \varphi_0), \quad (7.37)$$

где установившаяся амплитуда X_m и начальная фаза φ_0 должны быть определены.

Найдем первую и вторую производные:

$$\dot{x} = \omega X_m \cos \left(\omega t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\ddot{x} = \omega^2 X_m \cos (\omega t - \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x.$$

Подставляя их в уравнение (7.36), получаем:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) X_m \cos (\omega t - \varphi_0) + + 2\alpha\omega X_m \cos \left(\omega t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \equiv B \cos \omega t.$$

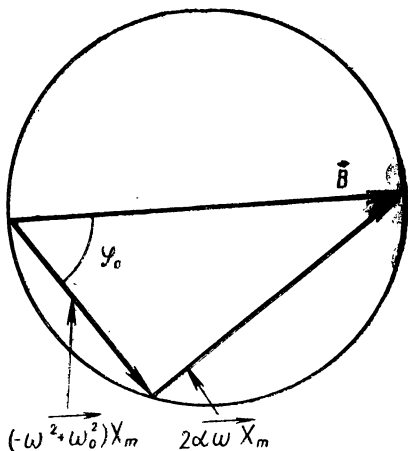


Рис. 7.12

Это выражение должно удовлетворяться тождественно при всех значениях времени. Мож-

но было бы использовать аналитический метод, примененный в предыдущем параграфе. Но мы воспользуемся методом векторных диаграмм (см. § 1.8). Векторы, представляющие левую часть уравнения, взаимно перпендикулярны, и сумма их равна постоянному вектору, представляющему правую часть уравнения. Поэтому, построив окружность диаметром B , можно утверждать, что вершины рассматриваемого векторного треугольника лежат на этой окружности (рис. 7.12).

Из прямоугольного треугольника сразу получается:

$$X_m^2 = \frac{B^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7.38)$$

Итак, амплитуда вынужденных колебаний зависит не только от амплитуды внешней силы, но и от соотношения между вынуждающей ω и собственной ω_0 частотами.

При постоянной силе ($\omega=0$) амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$X_{m0} = \frac{B}{\omega_0^2} = \frac{F_m}{k} = X_{ст},$$

т. е. известному уже статическому смещению.

При увеличении частоты ω (и при неизменной амплитуде внешней силы) амплитуда смещения растет, проходит через максимум и снова уменьшается, стремясь к нулю при неограниченном возрастании частоты. Это и понятно: инертная система «не успевает» следовать за очень быстрыми изменениями внешней силы.

Поэтому, например, электроизмерительные приборы постоянного тока не дают отклонений в цепи переменного тока ($\omega=314 \text{ с}^{-1}$).

Мы не будем подробно исследовать решение (7.38), так как больший практический интерес (и более содержательный в физическом отношении) представляет поведение скорости при вынужденных колебаниях. Беря производную по времени от (7.37) и учитывая (7.38), находим:

$$\dot{x} = \omega X_m \cos \left(\omega t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) = V_m \cos (\omega t - \psi_0), \quad (7.39)$$

где

$$V_m^2 = \frac{B^2}{\left(-\omega + \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2 + 4\alpha^2} = \frac{F_m^2}{\left(-\omega m + \frac{k}{\omega} \right)^2 + r^2} \quad (7.40)$$

и

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \operatorname{ctg} \varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\alpha\omega}. \quad (7.41)$$

Амплитуда скорости обращается в нуль при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$. При выполнении условия

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.42)$$

амплитуда принимает наибольшее значение:

$$V_{mp} = \frac{F_m}{2\alpha m} = \frac{F_m}{r}, \quad (7.43)$$

а фазовый угол (между векторами скорости и внешней силы) обращается в нуль:

$$\psi_0 = 0. \quad (7.44)$$

Условие (7.42) называют условием резонанса (отклика). Его физический смысл заключается в том, что внешняя сила

$$F_{\text{вн}} = F_m \cos \omega t = r\dot{x} = -F_{\text{тр}} \quad (7.45)$$

в каждый момент равна по модулю и противоположна по направлению силе трения, поэтому она производит наибольшую возможную работу, компенсируя потери на трение после того, как вынужденные колебания станут установившимися.

Заметим, что амплитуда смещения при резонансе равна:

$$X_{mp} = \frac{V_{mp}}{\omega_0} = \frac{F_m}{\omega_0 r} = \frac{F_m}{k} \frac{\sqrt{km}}{r} = X_{\text{ст}} Q. \quad (7.46)$$

На рисунке 7.13 изображены резонансные кривые (амплитудно-частотные характеристики), определяющие зависимость квадрата амплитуды скорости от частоты. При этом по оси ординат отложены отношения $\beta = \left(\frac{V_m}{V_{mp}} \right)^2$, а по оси абсцисс — относительная расстройка (отклонение от резонансной частоты) $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$ ($\omega_0 = 2\pi f_0$),

выраженная в процентах. Около кривых указаны значения добротности систем.

Величина

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = h,$$

при которой ордината кривой уменьшается вдвое:

$$\left(\frac{V_m}{V_{mp}}\right)^2 = 0,5,$$

называется *шириной* резонансной кривой; она очень просто связана с добротностью. Действительно, из уравнений (7.40) и (7.43) при $V_m^2 = 0,5V_{mp}^2$ получаем:

$$0,5 \frac{F_m^2}{4m^2\alpha^2} = \frac{F_m^2}{4m^2\alpha^2 + m^2\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2}.$$

После сокращений это уравнение приводится к виду:

$$2 = 1 + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{4\alpha^2\omega^2}.$$

Отсюда

$$2\alpha\omega \approx 2\alpha\omega_0 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0\Delta\omega.$$

Поэтому ширина кривой оказывается равной:

$$h = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Так как h может быть легко измерено по кривой, то получается практически удобный метод измерения добротности.

Таким образом, чем выше добротность, тем уже резонансная кривая и тем больше амплитуда скорости и смещения.

На рисунке 7.11, который мы уже рассматривали, слева были изображены резонансные кривые возбуждаемых систем.

Явление резонанса во многих случаях очень полезно: им пользуются в акустике — для усиления звучания музыкальных инструментов; в радиотехнике — для выделения нужного сигнала из множества других, отличающихся по частоте; в многоканальной телеграфии и т. д. Соответствующие колебательные системы обладают большой добротностью.

Но иногда резонанс оказывается вредным: он может вызвать колебания машин и их фундаментов. Для устранения резонанса пользуются системами с малой добротностью.

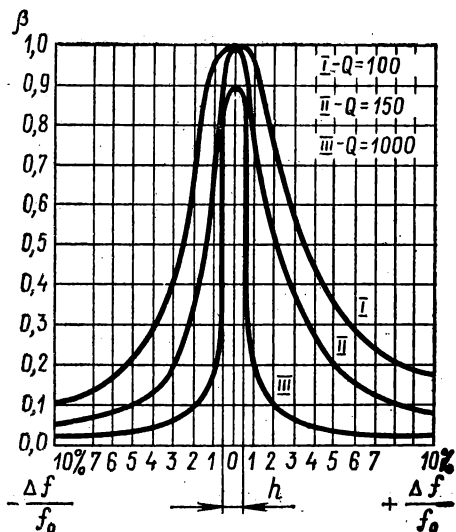


Рис. 7.13

Практически интересен следующий частный случай возбуждения колебательной системы: пусть она выводится из положения равновесия силой F , действующей малый промежуток времени τ (по сравнению с периодом колебаний системы). Тогда за время действия силы (она может быть и не постоянной по модулю, но должна сохранять свой знак) система, приобретя заметную скорость, практически не успевает сместиться, т. е. ее потенциальная энергия остается равной нулю.

После прекращения действия силы система продолжает движение, причем постепенно возникает упругая сила и кинетическая энергия системы переходит в потенциальную. Когда отклонение достигнет максимума X_m , кинетическая энергия полностью перейдет в потенциальную.

Применяя второй закон Ньютона и закон сохранения энергии, получим:

$$\int_0^{\tau} F dt = mv = p; \quad W_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} kX_m^2.$$

Если жесткость известна, то по измеренному X_m можно найти импульс p и судить о силе. Такой способ измерения силы называется баллистическим.

В системе могут быть слабо выражены инертные ($m \rightarrow 0$) или упругие ($k \rightarrow 0$) свойства, тогда она не будет обладать собственной частотой. В этом случае внешняя периодическая сила также вызовет вынужденные колебания, описываемые уравнением (7.37), однако никаких резонансных явлений при этом не наблюдается.

В заключение отметим, что в процессе возникновения и установления вынужденных колебаний существуют одновременно и затухающие собственные колебания. Это связано с линейностью системы и подчинением ее принципу наложения.

По той же причине достаточно было изучить влияние гармонической внешней силы. Если сила периодична, но не гармонична, то по теореме Фурье ее можно представить как сумму гармонических сил и создаваемые ими смещения будут просто складываться.

7.6. РАССМОТРЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД¹

В § 7.5 для получения решения уравнения вынужденных колебаний (7.36) мы использовали метод векторных диаграмм. Тот же результат дает и аналитический метод комплексных амплитуд (§ 1.8). Покажем это.

Положим, что внешняя сила в уравнении установившихся вынужденных колебаний (7.36) задается в виде

$$\vec{F} = B \exp(j\omega t),$$

¹ При первом чтении этот параграф можно опустить.

где $B = \frac{F_m}{m}$ — действительная величина. Решение ищем в виде:

$$\dot{x} = \dot{X}_m \exp(j\omega t).$$

Подставив это решение в (7.36), находим:

$$\dot{X}_m (-\omega^2 + 2j\alpha\omega + \omega_0^2) = B,$$

отсюда

$$\dot{X}_m = \frac{B}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\alpha\omega} = X_m \exp(-j\varphi_0).$$

Найдя модуль и фазу комплексного числа \dot{X}_m , получим действительную амплитуду и начальную фазу вынужденных колебаний:

$$X_m = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Итак, решение имеет вид:

$$x = \operatorname{Re}(\dot{x}) = X_m \cos(\omega t - \varphi_0),$$

что совпадает с ранее найденным выражением (7.37).

7.7. КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Во всех рассмотренных выше случаях параметры системы (r , m , k) были постоянны, а уравнения движения — линейны. При этом оказалось, что установившиеся вынужденные колебания происходят с частотой внешней периодической силы. Никаких добавочных частот не возникало; постоянная сила вызывала лишь статическое смещение. Но существует большой класс нелинейных колебательных систем, параметры которых зависят от состояния движения.

Трудности анализа колебаний в таких системах связаны с тем, что они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (поэтому и системы называют нелинейными); принцип наложения к ним применить нельзя. Поясним это примером. Пусть на пружинный маятник действует сила, столь сильно растягивающая пружину, что предел упругости (см. § 7.1) оказывается превзойденным. Тогда в выражении

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

жесткость уже не постоянна, но зависит от силы: $k = f(F)$.

В этом случае прежними методами задачу решать, конечно, нельзя. Система будет вести себя по-разному при движении «туда» и «обратно» (скажется гистерезис, рассмотренный в § 7.1). При двух воздействиях отклик отличен от суммы откликов на каждое воздействие в отдельности и т. д.

Одной из важнейших особенностей нелинейных систем является возникновение частот, отличных от частоты внешней силы, что

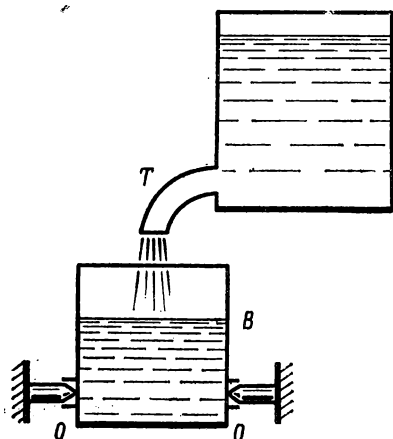


Рис. 7.14

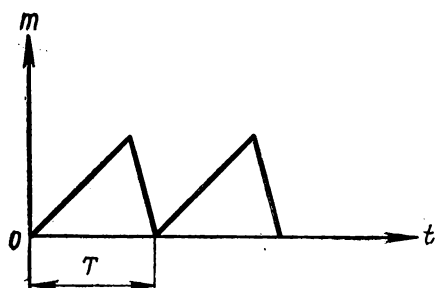


Рис. 7.15

широко используется в технике. В частности, в некоторых нелинейных системах появляется возможность получить незатухающие колебания под действием постоянной внешней силы.

Точных методов решения нелинейных уравнений не существует, применяются лишь приближенные. К этому вопросу мы вернемся при рассмотрении электрических явлений; здесь же с качественной стороны обсудим поведение нескольких простых систем.

На рисунке 7.14 изображена система, состоящая из источника энергии (водопровода), наполняющего через трубку T цилиндрический сосуд B ; этот сосуд может поворачиваться вокруг оси OO , расположенной так, что пустой сосуд находится в состоянии устойчивого равновесия. Но при заполнении сосуда водой его центр масс поднимается и устойчивость равновесия теряется — сосуд опрокидывается и быстро опорожняется, после чего возвращается в исходное состояние, и процесс возобновляется. Изменение массы воды

в сосуде со временем можно представить графически (рис. 7.15). Получающиеся колебания называются *пилообразными* или *релаксационными*. Период этих колебаний зависит от скорости подачи воды и от положения оси вращения. Нелинейность этой системы заключается в зависимости вращающего момента, действующего на сосуд, от массы воды, запасенной в сосуде.

Подобные же колебания, получаемые в электрических цепях, применяются, в частности, для управления движением электронного луча в электронных осциллографах и телевизорах. Устройства, где их получают, называют релаксаторами.

Примером нелинейной электромеханической системы, совершающей механические колебания под действием источника постоянной электродвижущей силы, является пружина (рис. 7.16), обтекаемая током. Один конец пружины закреплен, другой погружен в чашечку со ртутью. При замыкании электрической цепи витки, обтекаемые током одного направления, притягиваются, пружина сжимается и цепь разрывается; после разрыва цепи упругие силы

восстанавливают первоначальную длину пружины, цепь замыкается и все повторяется снова.

Подобные системы называются *автоколебательными*, так как колебания в них получаются под действием постоянной силы; но сама система управляет расходом энергии источника (то включая его, то выключая). Для таких систем характерны: нелинейность и наличие «обратной связи», т. е. механизма, приводимого в действие внешней силой и, в свою очередь, воздействующего на источник. Так, в нашем примере ток вызывает сжатие пружины, при этом цепь разрывается, после чего упругие силы пружины снова замыкают ее.

Частота колебаний определяется параметрами самой системы, а не источником питания. Колебания получаются негармоническими.

Если «обратная связь» осуществлена неправильно, то она не будет способствовать возникновению колебаний. Например, если изготовить пружину, у которой соседние витки намотаны «встречными витками», т. е. в противоположные стороны, то между витками при протекании тока возникнут силы отталкивания, пружина удлинится и ртутный контакт не будет разрываться — никаких колебаний не получится.

Чисто механической автоколебательной системой являются часы с маятником («ходики»), изображенные на рисунке 7.17. Они имеют зубчатое колесо 2 с зубцами определенной формы; зубцы в процессе движения то задерживают, то освобождают пластину специальной формы 1, жестко связанную с осью 0; на этой же оси закреплен маятник (колебательная система). С зубчатым колесом жестко связан шкив, несущий цепь 3; на конце цепи имеется тяжелая гиря (источник потенциальной энергии, питающей систему). При колебаниях маятника, пока зубцы задерживают пластину, направление силы, испытываемой пластиной, проходит через ось вращения

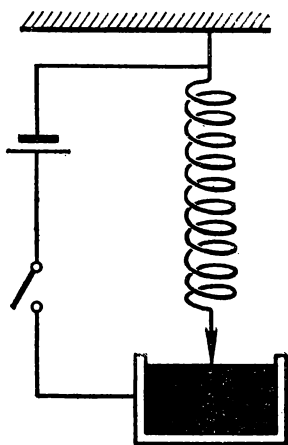


Рис. 7.16

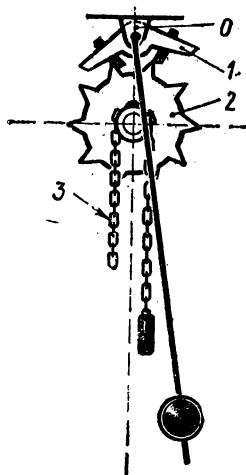


Рис. 7.17

и вращающий момент равен нулю. Когда же пластина сходит с зубцов, она (и маятник) испытывает кратковременный толчок и действие кратковременного вращающего момента, увеличивающего энергию маятника. Одновременно гири опускается, передавая свою энергию системе. Устройство рассчитано так, что потеря кинетической энергии маятником за половину периода как раз равна приросту энергии его за счет работы вращающего момента. Толчки происходят при прохождении маятником положения равновесия, дважды за период.

Весьма примечательно следующее свойство этой автоколебательной системы: она не может прийти в движение самостоятельно, ее сперва нужно толкнуть. Если толчок не слишком слаб, то работа вращающего момента будет превышать потерю энергии, и маятник будет раскачиваться. Если первоначальный толчок слишком силен, то работа вращающего момента не сможет компенсировать потерю кинетической энергии, и амплитуда колебаний будет уменьшаться, пока потери на трение за период не сравняются с приростом энергии за счет опускающейся гири.

В обоих случаях установившаяся амплитуда колебаний оказывается независимой от начальных условий, что является отличительным признаком нелинейной колебательной системы.

Заметим, что сила сухого трения нелинейна даже при малых скоростях (она меняет знак при изменении направления скорости, но не зависит от ее модуля), поэтому автоколебания часто возникают в системах с сухим трением.

Еще один тип колебаний — параметрические — имеет место в тех случаях, когда в процессе движения периодически изменяются параметры системы.

Так, при раскачивании на качелях можно увеличить амплитуду, обусловленную первоначальным толчком (он необходим, так как самопроизвольно система в колебательное движение не придет), если приседать в моменты наибольшего отклонения качелей и выпрямляться при прохождении ими положения равновесия. При этом потенциальная энергия (в поле тяжести Земли) при приседаниях уменьшается на меньшую величину, чем увеличивается при выпрямлениях. Таким образом, дважды за период колебаний качелей энергия системы получает приращения; если они больше потерь на трение, система может значительно раскачаться. Когда обе эти величины сравняются, колебания станут устойчивыми. Изменяемым параметром здесь является момент инерции качелей. Как и автоколебания, параметрические колебания оказываются не строго гармоническими; однако в обоих случаях это отличие можно сделать достаточно малым. Наиболее интересные применения параметрические колебания нашли не столько в механике, сколько в радиотехнике.

Строго говоря, все реальные системы, в сущности, нелинейны, и широко распространенное линейное рассмотрение их — лишь приближение, справедливое только при достаточно малых амплитудах колебаний.

8.1. КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ. ОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН

Для описания колебаний, изучавшихся до сих пор, достаточно было задать закон изменения одной координаты: системы обладали одной степенью свободы. Но во многих случаях колебательные системы связаны друг с другом. Так, два маятника (рис. 8.1), способные колебаться в плоскости, перпендикулярной чертежу, представляют собой простейшую связанную систему. Связь создает нить, натягиваемая силой тяжести груза массой m_1 (при этом $m_1 \ll m$). Если вывести один из маятников из положения равновесия и предоставить самому себе, то импульс и энергия от первого маятника будут передаваться второму, затем обратно. Положение нити влияет на скорость передачи движения; чем ниже расположена нить, тем сильнее связь между маятниками.

Такое же наблюдение можно провести и на цепочке одинаковых маятников, связанных друг с другом: если возбудить колебания одного из них, то движение постепенно передается все дальше и дальше. Каждый маятник повторяет движение, совершаемое его соседом, но с некоторым запаздыванием по фазе. Принято говорить, что в данном случае по системе маятников распространяется *волна*. Так как движения маятников происходят в направлении, перпендикулярном распространению процесса, то волна называется *поперечной*. Если же колебания происходят вдоль линии распространения (например, продольные колебания витков длинной пружины), то волну называют *продольной*.

В рассмотренных примерах связь между частями системы была вызвана силами упругости — такую волну называют упругой. Но связи могут быть и неупругими: между электрически заряженными металлическими (или легкими стеклянными металлизированными) шариками передача импульса и энергии осуществляется за счет сил кулоновского взаимодействия. Между маятниками, выполненными в виде катушек с током, связь имеет

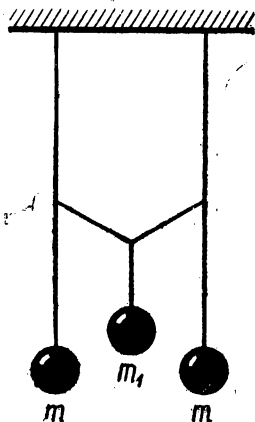


Рис. 8.1

магнитную природу; в этих случаях мы имеем дело с электро-механическими системами.

Если связанные колебательные системы распределены по плоскости, то получается двумерная волна. Ее легко наблюдать на поверхности воды. Создав возмущение в некоторой точке, замечаем, что оно распространяется в виде круговых волн. В данном случае волна не является упругой, так как движение частиц воды в вертикальной плоскости обусловлено не упругими силами (жидкость не сопротивляется изгибу), а силой тяжести и силами поверхностного натяжения, развивающимися в поверхностных слоях жидкости. Однако кинематические характеристики водяных волн не отличаются от характеристик упругих волн, поэтому водяные волны могут служить моделью при изучении упругих волн.

В самом общем случае волна может распространяться в пространстве. Пусть волна возбуждается периодически пульсирующим шаром, находящимся в однородной изотропной упругой среде (например, в воздухе), тогда на любой шаровой поверхности, имеющей общий центр с пульсирующим шаром и радиус, превышающий радиус шара, все точки будут колебаться в одинаковой фазе — получается пространственная шаровая (сферическая) волна.

Поверхность, содержащую точки, колеблющиеся в одинаковой фазе, принято называть *волновым фронтом*; линию, характеризующую направление распространения волны, называют *лучом*. В изотропной среде лучи нормальны к волновым фронтам.

Плоскость, проходящую через луч и направление, в котором происходят колебания, называют *плоскостью колебаний*. Если в поперечных волнах эта плоскость не меняет своего положения со временем, то поперечную волну называют *линейно-поляризованной* или *плоско-поляризованной*. Однако возможны и другие, более сложные типы поляризации; они будут рассмотрены в оптике.

Плоскость, перпендикулярную плоскости колебаний и также проходящую через луч, иногда называют *плоскостью поляризации*.

Для продольной волны положение плоскости колебаний, очевидно, определить невозможно. Поэтому при рассмотрении продольных волн этим понятием не пользуются.

Кроме механических волн, обусловленных силами упругости, существуют механические волны, вызванные силами иной природы (например, поверхностные волны на свободной поверхности жидкости), а также электромагнитные волны (включающие и волны видимого света). Несмотря на различную природу, эти волны подчиняются общим для всех типов математическим закономерностям (как это было и в случае колебаний). В дальнейшем волны мы будем характеризовать «обобщенным смещением», т. е. скалярной величиной z , которая может представлять как смещение в продольной волне, совпадающее с направлением луча, так и смещение в линейно-поляризованной поперечной волне либо давление, создающееся в акустической волне. Лишь при переходе к энергетическим соотношениям мы конкретизируем природу волны.

Как и в случае колебаний, мы ограничимся волнами с малыми амплитудами смещений Z_m , чтобы возникающие деформации можно было считать упругими, подчиняющимися закону Гука и, следовательно, принципу наложения. Здесь применимость этого принципа становится особенно наглядной. Например, при распространении двух волн каждая из них распространяется так, как если бы другой не было. А в области, где волны перекрываются, результат их наложения находится простым суммированием смещений составляющих волн.

По той же причине мы ограничимся рассмотрением только гармонических волн; более сложные волны могут быть представлены совокупностью этих простейших. Наконец, мы допустим, что скорость распространения волн не зависит от частоты колебаний (это справедливо только для непоглощающих прозрачных сред).

8.2. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ

Если в среде беспрепятственно распространяется одна единственная волна, то ее называют бегущей. Наложение нескольких бегущих волн друг на друга создает, как мы увидим ниже (§ 8.5), более сложный процесс.

Составим уравнение бегущей волны, позволяющее определять смещение любой точки волны в любой момент времени. Для простоты начнем с линейной волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси X со скоростью v .

Пусть точка, находящаяся в начале координат, движется по закону:

$$z_0 = Z_m \cos \omega t = Z_m \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right). \quad (8.1)$$

Тогда точка, имеющая координату покоя x , будет двигаться по закону:

$$z = Z_m \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (8.2)$$

так как время запаздывания ее относительно первой точки есть:

$$\tau = \frac{x}{v}.$$

Уравнение волны (8.2) можно переписать в виде:

$$z = Z_m \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] = Z_m \cos (\omega t - kx), \quad (8.3)$$

где $\lambda = vT$ — расстояние, на которое волна распространяется за период колебаний точки. Это расстояние называется *длиной волны* или *пространственным периодом*.

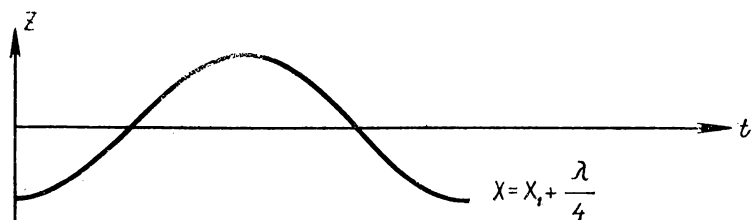
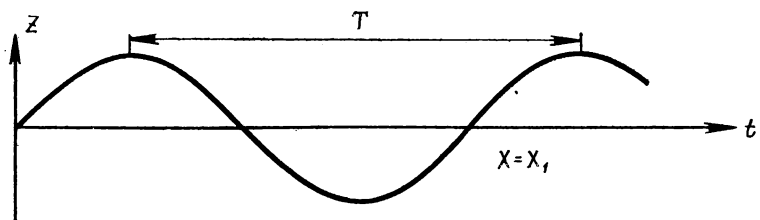


Рис. 8.2

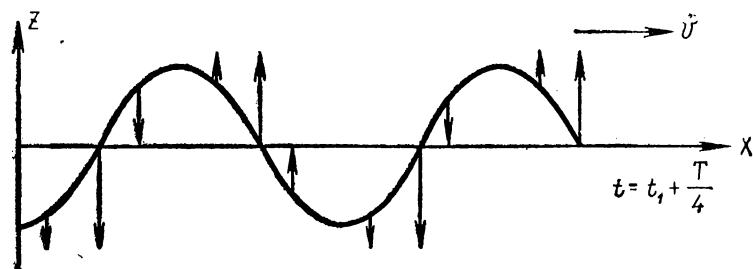
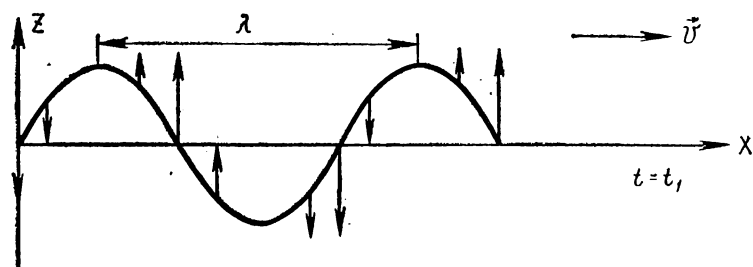


Рис. 8.3

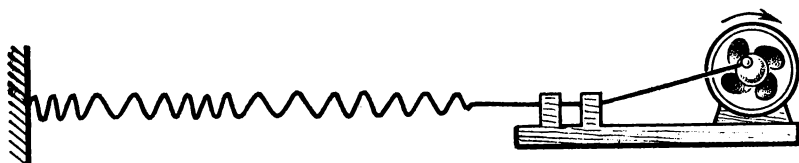


Рис. 8.4

Коэффициент

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

называют *волновым числом*: он определяет число волн, укладываемых на отрезке длиной 2π м; подобно этому циклическая частота ω определяет число периодов T , «укладывающихся» на отрезке времени в 2π с.

Если задать координату, то уравнение волны позволяет описать движение данной точки во времени; на рисунке 8.2 показаны графики движения двух точек, смещенных в пространстве на четверть длины волны.

Если же задать время, то уравнение волны позволяет определить мгновенные смещения всех точек волны. На рисунке 8.3 показаны «мгновенные фотографии» поперечной волны для двух моментов, смещенных на четверть периода. Стрелки соответствуют мгновенным скоростям точек.

«Мгновенная фотография» продольной волны, образовавшейся на длинной пружине, показана на рисунке 8.4.

Закономерности (8.2) и (8.3) пригодны для любых типов волн, если только характерные для волн величины изменяются по гармоническому закону.

Скорость распространения упругой волны зависит от типа деформации и от плотности среды ρ и вычисляется по уравнению:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (8.4)$$

где E — модуль соответствующей деформации (сжатия, сдвига, изгиба). Мы приводим эту формулу без вывода. Например, при продольных деформациях относительное изменение длины $\frac{dx}{x}$ равно относительному изменению объема $\frac{dV}{V}$, занимаемого веществом (массой m и плотностью ρ). Так как $m = \text{const}$, то пропорционально меняется и плотность. Поэтому, если под E понимать модуль Юнга, а действующее давление изменить на dp , то получатся соотношения:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dp}{E}.$$

Отсюда следует важная связь между скоростью распространения волны и изменениями давления и плотности:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{E}{\rho} = v^2. \quad (8.5)$$

Следует подчеркнуть, что скорость распространения волны не имеет никакого отношения к скорости движения отдельных точек. Пока амплитуды колебаний малы (а мы будем заниматься только такими случаями), скорость распространения не зависит от ампли-

туды; в широком интервале частот она также не зависит и от частоты.

Скорость распространения продольных волн в металлах составляет около 4500—5000 м/с, в воде ≈ 1500 м/с (речь идет об упругих колебаниях — сжатии и расширении, которые можно возбудить в глубине водяного слоя). Неупругие поверхностные волны на воде распространяются гораздо медленнее (их скорость не превышает 0,1 м/с), что делает их удобными для наблюдений.

Скорость упругих волн в газе (где имеют место только продольные колебания), как будет доказано в молекулярной физике, зависит от его свойств и вычисляется по формуле:

$$v = \sqrt{\frac{RT}{M} \gamma}, \quad (8.6)$$

где M — молярная масса, T — абсолютная температура, R — газовая постоянная ($R=8,31$ Дж/(моль·К)), γ — безразмерная величина, связанная с процессами, происходящими в газе при его деформациях (для воздуха $\gamma=1,4$). Так как молярная масса воздуха $M \approx 29$ кг/моль, то для скорости звука при $T_0=273$ К получается $v_0=330$ м/с. При другой температуре T скорость звука, как видно из формулы (8.6), равна:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Так как обычная температура воздуха не превышает $T=300$ К, то скорость продольных колебаний в воздухе (скорость звука) составляет около 330 м/с.

При написании уравнения (8.2) мы предполагали, что волна распространяется в направлении оси X . Если она движется в противоположном направлении, то второе слагаемое в аргументе меняет знак (так как v заменяется на $-v$).

8.3. ЭНЕРГИЯ ВОЛНЫ

Амплитуду колебаний всех точек линейной волны мы считали одинаковой, так как не учитывали затухания (мы его учтем позже).

Чтобы написать уравнение круговой поверхностной волны, мы должны в уравнении (8.2) заменить x на r — радиус-вектор рассматриваемой точки. Кроме того, надо учесть, что амплитуда убывает с расстоянием, поскольку число точек, вовлекаемых в колебание, растет пропорционально радиусу. Так как энергия колеблющейся точки пропорциональна квадрату амплитуды, то амплитуда в этой волне должна меняться обратно пропорционально корню квадратному из радиуса, поэтому для поверхностной круговой волны получается следующий закон движения:

$$z = \frac{z_m}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr). \quad (8.7)$$

Таков же закон для цилиндрических пространственных волн. В сферической волне амплитуда изменяется обратно пропорционально радиусу волны, поэтому для нее закон движения имеет вид:

$$z = \frac{Z_m}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (8.8)$$

Если рассматривается ограниченная область, размеры которой малы по сравнению с радиусом волны, то заметного изменения амплитуды не происходит, а радиус-векторы оказываются практически параллельными друг другу; тогда процесс описывается уравнением (8.3), а волна называется *плоской*. На поверхности воды плоскую волну можно получить, приводя в колебание длинную пластину, сообщающую движение воде сразу по всей ширине водяной ванны. В пространстве волна будет практически плоской, если она создается плоским поршнем больших размеров, колеблющимся взад-вперед, а процесс изучается в средней части волны, недалеко от поршня. Математическое описание плоской волны наиболее просто; мы и будем вести расчеты для этого случая.

Для нахождения мгновенных скоростей точек волны следует фиксировать координаты покоя точек волны (8.3) и взять частную производную по времени от смещения. При этом получится:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \omega Z_m \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.9)$$

Если волна распространяется в непрерывной среде плотностью ρ , то, выделив на волновом фронте участок dS , на который опирается цилиндр длиной dx , найдем, что его мгновенная кинетическая энергия равна:

$$dW_k = \frac{1}{2} \rho dS dx \omega^2 Z_m^2 \cos^2 \varphi_t, \quad (8.10)$$

где

$$\varphi_t = \omega t - kx + \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, как и в случае колебаний одиночного маятника, кинетическая энергия максимальна при прохождении точки волны через положение равновесия и обращается в нуль при наибольшем отклонении точки. Скорость меняет знак при наибольшем отклонении точки от положения равновесия.

Одиночный маятник, находящийся в положении наибольшего отклонения, имеет наибольшую потенциальную энергию. В волне дело обстоит иначе. Действительно, потенциальная энергия деформации определяется не абсолютным, а относительным значением деформации смещения. Если, например, длинную спиральную пружину перемещать целиком вдоль ее оси, то никакой продольной деформации не произойдет даже при очень больших смещениях. Подобно этому, если тонкую металлическую или деревянную линейку передвинуть параллельно самой себе (не деформируя), то

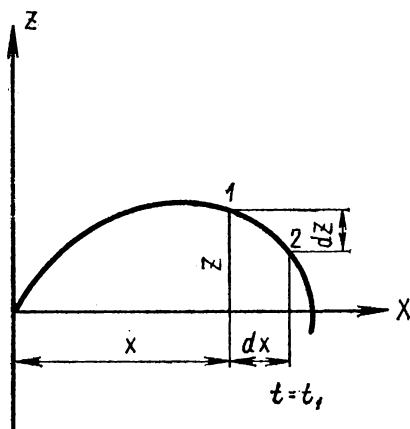


Рис. 8.5

на в положение 2 с координатами $(x+dx, z+dz)$; в данном случае $dz < 0$. При этом

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

Поэтому относительное смещение равно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\omega}{v} Z_m \cos \varphi_t. \quad (8.11)$$

Тогда для потенциальной энергии элемента объема $dS dx$ получается выражение:

$$dW_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \cos^2 \varphi_t dx dS. \quad (8.12)$$

Его анализ показывает, что потенциальная энергия максимальна в тех же элементах объема, где максимальна кинетическая энергия, т. е. при прохождении точек через положения равновесия. Такое отличие распределения энергии от случая одиночного маятника объясняется тем, что в волне точки обмениваются энергиями, а одиночный маятник только преобразует свою энергию из одного вида в другой.

Полный запас энергии в выбранном объеме равен:

$$dW = \frac{E}{v^2} (Z_m \omega)^2 \cos^2 \varphi_t dS dx. \quad (8.13)$$

Так как $E = \rho v^2$ (см. соотношение 8.4) и, следовательно, $dW_k = dW_p$, то мгновенная плотность энергии в волне равна:

$$w = \frac{dW}{dS dx} = \rho (Z_m \omega)^2 \cos^2 \varphi_t. \quad (8.14)$$

На практике нас мало интересует, что делается в объеме в данный момент, важнее знать, что происходит в среднем. Усредняя выраже-

даже при очень больших смещениях потенциальная энергия (энергия деформации) будет равна нулю. Но при растяжении пружины (или изгибе пластины) энергия деформации, конечно, появляется. Следовательно, потенциальная энергия деформации зависит от относительного смещения точек в фиксированный момент времени (рис. 8.5). Так, точка, имевшая в положении равновесия координаты $(x, 0)$, смещена в положение 1 с координатами (x, z) . Соседняя точка с координатами положения равновесия $(x+dx, 0)$ смеще-

ние (8.14) за период колебаний, получаем (так как средний квадрат косинуса за период равен 0,5):

$$\omega = \frac{1}{2} \rho (Z_m \omega)^2. \quad (8.15)$$

Итак, распространяющаяся волна несет с собой энергию. Через поперечное сечение, равное 1 м^2 , за 1 с пройдет энергия, заключенная в объеме параллелепипеда с длиной, численно равной скорости волны v :

$$I = \omega v = \frac{1}{2} (\rho v) (Z_m \omega)^2. \quad (8.16)$$

Эту величину называют *интенсивностью* волны или плотностью потока энергии. Она зависит от двух сомножителей: первый (ρv) характеризует среду, второй — свойства колеблющейся точки в волне. Величина $R = \rho v$ называется *удельным акустическим сопротивлением* среды. Второй сомножитель можно связать с избыточным давлением, возникающим в волне. Если волна продольная, то относительное смещение служит одновременно и мерой относительного сжатия. Для наибольшего сжатия в соответствии с законом Гука имеем:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_m = \frac{\sigma_m}{E} = \frac{p_m}{E},$$

где σ_m — амплитуда напряжения, p_m — амплитуда избыточного давления. Пользуясь соотношением (8.11), находим:

$$\omega Z_m = \frac{p_m}{E} v = \frac{p_m}{R}. \quad (8.17)$$

Тогда для интенсивности получается практически полезное выражение:

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{R}. \quad (8.18)$$

Так, при распространении звука умеренной громкости в воздухе ($R = 430 \text{ Па} \cdot \text{с/м}$) амплитуда переменного избыточного давления равна примерно $0,1 \text{ Па}$, а атмосферное давление, как известно, составляет около 10^5 Па . При периоде колебаний $T = 10^{-3} \text{ с}$ амплитуда смещения слоев воздуха составит всего $4 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, а интенсивность звуковой волны 10^{-5} Вт/м^2 . При той же амплитуде смещения в воде, обладающей удельным акустическим сопротивлением, равным:

$$R_B = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{с/м} = 3500 R,$$

энергия была бы соответственно больше (в 3500 раз).

Уравнение (8.16) можно представить в следующем виде:

$$I = \frac{1}{2} E \left(\frac{\omega Z_m}{v} \right) (\omega Z_m) = \frac{1}{2} \left(E \frac{\partial z}{\partial x} \right)_m \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_m.$$

Сравнив его с вектором Умова, введенным в главе 7 (уравнение 7.8), убеждаемся, что и в нашем случае мы получили вектор Умова (для волнового процесса), зависящий от напряжения и скорости колеблющихся частиц.

Если среда обладает заметным поглощением, то интенсивность I при прохождении пути dx уменьшается, причем

$$-dI = \alpha I dx.$$

Интегрируя это выражение на отрезке $(0, x)$, положив в начале отрезка $I = I_0$, получаем интегральный закон поглощения энергии:

$$I = I_0 \exp(-\alpha x). \quad (8.19)$$

Величина α называется *коэффициентом поглощения* энергии. Аналогичный закон может быть записан и для амплитуды давления:

$$p_m = p_{m0} \exp(-0,5 \alpha x).$$

В воздухе $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \text{м}^{-1}$.

Звуковая волна (шаровая), распространяясь в воздухе, ослабляется как за счет поглощения, так и за счет увеличения размеров ее фронта. Так как α невелико, то на расстояниях до 1 км основной является вторая причина (ослабление в миллионы раз). На больших расстояниях, практически не представляющих особого интереса, роль поглощения становится решающей.

В области ультразвуковых частот (10^5 Гц и выше) улучшаются возможности создания волн, фронт которых почти плоский; в этом случае ослабление волны определяется в первую очередь ее поглощением.

8.4. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим теперь, что произойдет, если в среде существуют одновременно волны, порождаемые источниками, удовлетворяющими следующим жестким требованиям:

- а) источники колеблются со строго одинаковой частотой;
- б) разность фаз между колебаниями источников длительное время (т. е. во всё время изучения процесса, охватывающего большое число периодов) сохраняется постоянной;
- в) расстояние между источниками должно превышать длину волны, возникающей в среде, окружающей источники.

Источники, для которых выполнены условия *а* и *б*, называются *когерентными* и могут быть созданы искусственно.

Простым примером двух когерентных источников являются две проволочки, прикрепленные к общей горизонтальной пружине и погруженные своими концами в водяную ванну. Расстояние между ними должно составлять несколько длин волн, порождаемых ими в воде. Освещая ванну снизу (ее дно должно быть прозрачным) и наблюдая проходящий свет на экране, мы увидим (при отсутствии

волн) равномерно освещенное поле. Когда же в воде создаются поверхностные волны, то различие в преломлении света на плоской и изогнутой поверхности воды приводит к образованию неравномерно освещенных участков. При колебаниях одной проволочки видны бегущие круговые волны, распространяющиеся от места погружения конца проволочки к краям ванны. При колебаниях обеих проволочек получается неподвижная картина — система гипербола, имеющих фокусы в точках расположения источников. Следовательно, вся поверхность разбивается на области с различными амплитудами колебаний. Так как волны подчиняются принципу суперпозиции, то для описания полученной картины следует просто сложить колебания, возникающие в каждой точке поверхности воды.

Итак, пусть оба источника — S_1 и S_2 (рис. 8.6) — колеблются по закону:

$$z = Z_m \cos \omega t. \quad (8.20)$$

В точку A волны приходят с запаздыванием по фазе, зависящим от расстояний R_i :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{Z_m}{\sqrt{R_1}} \cos(\omega t - kR_1); \\ z_2 &= \frac{Z_m}{\sqrt{R_2}} \cos(\omega t - kR_2). \end{aligned}$$

Допуская для простоты равенство амплитуд обеих волн (R — среднее расстояние до источников), получаем:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{Z_m}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR_1); \\ z_2 &= \frac{Z_m}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR_2). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Складывая, находим:

$$z = z_1 + z_2 = \frac{2Z_m}{\sqrt{R}} \cos\left(\pi \frac{R_1 - R_2}{\lambda}\right) \cos(\omega t - kR). \quad (8.22)$$

Геометрическим местом точек, колеблющихся с одинаковой амплитудой, являются гиперболы (в пространстве это были бы ги-

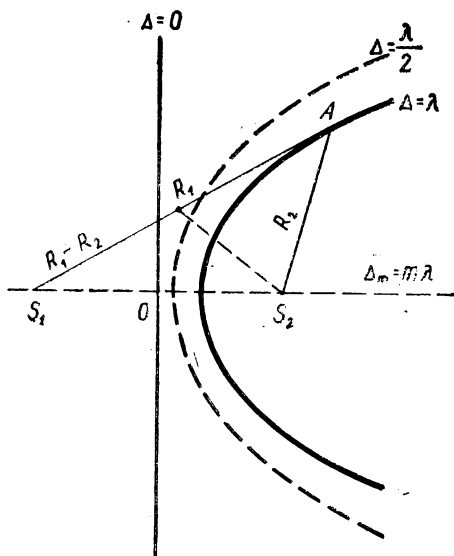


Рис. 8.6

перболоиды вращения; ось вращения проходит через источники). Гипербола нулевого порядка, для которой разность хода волн равна

$$\Delta = R_1 - R_2 = 0,$$

вырождается в прямую, проходящую через середину расстояния между источниками перпендикулярно оси. Гиперболы с большими разностями хода располагаются по обе стороны от нулевой и тем дальше, чем больше разность хода. Наконец, гипербола, соответствующая наибольшей разности хода, вырождается в прямую, совпадающую с осью, причем для всех точек оси (вне отрезка S_1S_2) эта наибольшая разность хода равна:

$$\Delta_m = |R_1 - R_2| = m\lambda. \quad (8.23)$$

При разности хода, равной целому числу волн:

$$\Delta = n\lambda \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

колебания имеют наибольшую амплитуду. При разности хода, составляющей нечетное число полуволн:

$$\Delta = (2n-1) \frac{\lambda}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

амплитуда колебаний наименьшая (нулевая). Благодаря инерции светового восприятия, глаз видит неподвижные гиперболы разной степени освещенности, зависящей от амплитуды.

Явление, при котором происходит перераспределение энергии колебаний в пространстве (в зависимости от разности хода волн), называется *интерференцией* волн. Область интерференции волн строго равной амплитуды называется областью стоячих волн; здесь нет переноса энергии в определенном направлении, потенциальная энергия лишь переходит от участков, отвечающих наибольшим деформациям, к участкам, отвечающим наибольшим скоростям или смещениям, где эта энергия появляется в форме кинетической энергии.

Если амплитуды слагаемых волн не равны друг другу, то получается сложная картина; здесь присутствуют и стоячие и бегущие волны. Заметим, что при наибольшей разности хода, не достигающей половины длины волны, в пространстве, где волны перекрываются, не создается чередующихся максимумов и минимумов смещений (или деформаций).

В наиболее чистом виде стоячие волны получаются при наложении двух волн равной амплитуды, распространяющихся навстречу друг другу (например, в одномерной структуре — шнуре). Полагая, что шнур протянут вдоль оси абсцисс, можем задать эти волны уравнениями:

$$\begin{aligned} z_1 &= Z_m \cos(\omega t - kx), \\ z_2 &= Z_m \cos(\omega t + kx). \end{aligned}$$

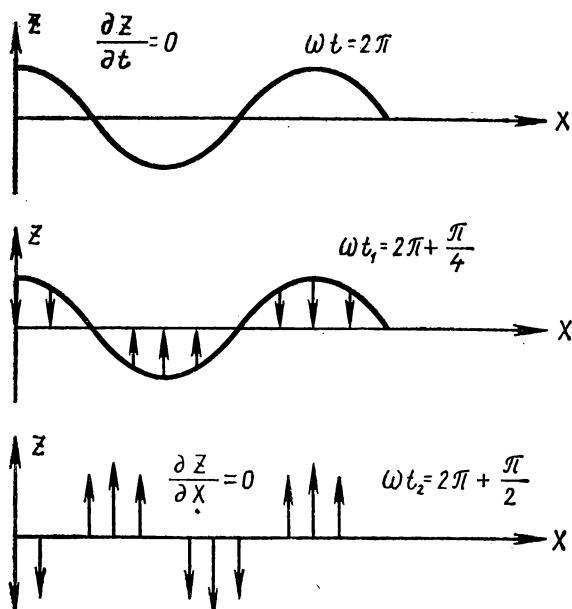


Рис. 8.7

Тогда суммарное смещение будет описываться выражением:

$$z = z_1 + z_2 = 2 Z_m \cos kx \cos \omega t. \quad (8.24)$$

Распределение скоростей в стоячей волне подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -2\omega Z_m \cos kx \sin \omega t, \quad (8.25)$$

а распределение относительных смещений таково:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2k Z_m \sin kx \cos \omega t. \quad (8.26)$$

Мгновенные распределения смещений для трех моментов времени изображены на рисунке 8.7. Стрелками указаны мгновенные распределения скоростей.

Кинетическая энергия $W_k \sim \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$ концентрируется вблизи точек, имеющих наибольшую амплитуду скорости (и, следовательно, абсолютного смещения). Энергия деформации $W_d \sim \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ концентрируется вблизи точек, обладающих наибольшим относительным (наименьшим абсолютным) смещением.

Кроме того, максимумы обеих энергий равны и смещены во времени на четверть периода колебаний. Таким образом, здесь уже нет непрерывного переноса энергии (как в бегущей волне), а есть

лишь ее колебания между областями наименьшего смещения (узлы смещения) и наибольшего смещения (пучности смещения).

Полная энергия:

$$W = W_k + W_d$$

равна наибольшей кинетической энергии (или наибольшей энергии деформации), так как при достижении этого максимума энергия деформации отсутствует (или наоборот). Узлы смещения представляют собой одновременно и узлы скорости, пучности смещения соответствуют пучностям скорости.

Согласно уравнениям (8.24—8.26) узлы скорости смещены относительно узлов деформации (давления) на четверть волны (в пространстве).

Если в соответствии с уравнением (8.24) рассчитать максимум любой из энергий (например, кинетической), приходящейся на параллелепипед длиной λ и сечением dS при плотности среды ρ , то получится:

$$dW_k = \frac{1}{2} \rho dS \omega^2 4Z_m^2 \int_0^\lambda \cos^2 \omega x dx = \rho Z_m^2 \omega^2 \lambda dS$$

(что равно сумме энергий бегущей и встречной волн). Средний поток энергии, проходящий через любой такой параллелепипед, равен нулю — волна является *стоячей*, т. е. энергия, переносимая слева направо, строго равна переносимой в обратную сторону.

8.5. ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН

Для получения стоячих волн удобно использовать отражение бегущей волны от границы раздела двух сред. Так, если один конец горизонтального шнура жестко привязан к гвоздю, вбитому в стену, а другой находится в руках экспериментатора, то при ударе по шнуру, например сверху вниз, можно заметить, что возникает местный изгиб шнура вниз — импульс, бегущий по шнуру (рис. 8.8).

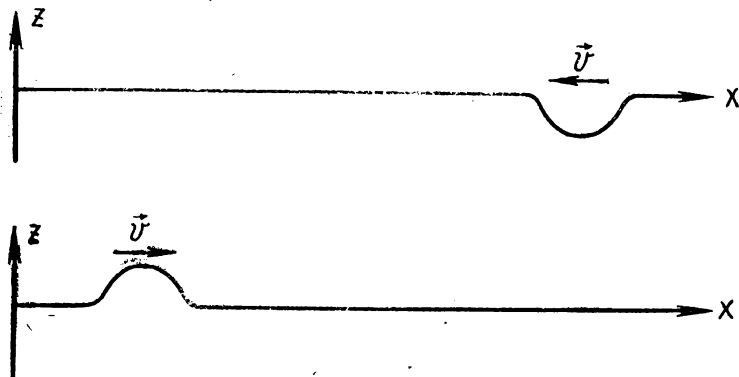


Рис. 8.8

После отражения от закрепленного конца отраженный импульс имеет противоположный знак: шнур изгибается вверх. Это легко понять, если учесть, что в точке закрепления существуют оба импульса одновременно, но суммарное смещение всегда равно нулю. Значит, смещения обоих импульсов имеют противоположные знаки.

При отражении от такого (закрепленного) конца гармонической волны смещения обеих волн должны иметь (в закрепленной точке) противоположные знаки: волна отражается, «теряя полволны». На границе ($x=0$):

$$z_{\text{пад}} = Z_m \cos \omega t; \quad z_{\text{отр}} = Z_m \cos (\omega t \pm \pi).$$

Если второй конец шнура свободен (можно воспользоваться вертикально висящим шнуром и возбуждать импульс в одной из точек верхней половины шнура), то импульс отражается без перемены знака смещения. Это значит, что при отражении бегущая (падающая) и отраженная волны (на конце шнура) имеют смещения одинаковых знаков, в результате чего на свободном конце смещение удваивается.

Можно показать, что в общем случае (при нормальном падении волны на плоскую границу раздела сред 1 и 2) коэффициент отражения (по амплитуде) равен:

$$\Gamma_z = \frac{Z_{m_{\text{отр}}}}{Z_{m_{\text{пад}}}} = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}. \quad (8.27)$$

Он зависит от соотношения акустических сопротивлений сред. Коэффициент отражения (по энергии) определяется квадратом выражения (8.27):

$$\Gamma_w = \left(\frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} \right)^2. \quad (8.28)$$

При равенстве акустических сопротивлений сред волна полностью проходит во вторую среду — отражение отсутствует. При большом различии акустических сопротивлений прохождение волн ухудшается и отражение получается почти полным.

Интересно отметить, что отражение энергии одинаково при переходе волны из среды 1 в среду 2 и при обратном переходе. Амплитуда отраженной волны при этом также не меняется, фаза же оказывается противоположной.

При наклонном падении выражения для коэффициентов отражения усложняются.

Образование стоячих волн в одномерной среде (шнуре)

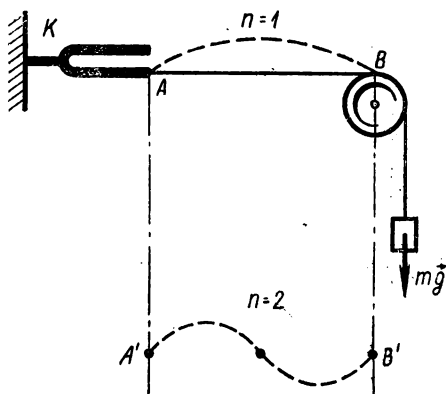


Рис. 8.9

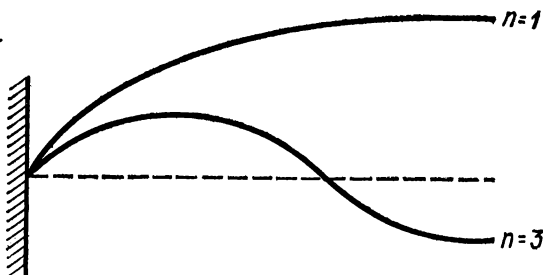


Рис. 8.10

удобно показать на следующем опыте. Камертон K , возбуждаемый электромагнитным способом, прикреплен к концу шнура (рис. 8.9), имеющего линейную плотность ρ_l . Другой конец шнура переброшен через блок и натягивается силой тяжести $m\vec{g}$ груза, прикрепленного к этому концу. Регулируя натяжение шнура подбором груза, можно получить на нем интенсивные стоячие волны. Это объясняется тем, что скорость распространения волны в шнуре равна:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{ES}{\rho_l}} = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \quad (8.29)$$

где S — поперечное сечение шнура, T — его натяжение. Изменяя натяжение, можем получить разное число волн при одной и той же частоте колебаний.

Когда на шнуре укладывается целое число полувольт (оба его конца можно считать закрепленными), то он колеблется в резонансе с вынуждающей силой, создаваемой камертоном, и амплитуда колебаний делается значительной. На рисунке 8.9 показаны два возможных типа возбужденных стоячих волн: при $n=1$ возбуждается основной тон, при $n=2$ — второй обертоном.

Такое же распределение получилось бы у стержня со свободными концами, только на концах был бы максимум смещения, а посередине — нулевое смещение. Если же один конец стержня свободен, а другой закреплен (рис. 8.10), то интенсивные стоячие волны получаются при условии, что на длине стержня укладывается нечетное число четвертей волны. Действительно, на одном конце смещение должно быть нулевым, на другом — наибольшим.

Стоячие волны (и соответствующие им частоты) называются *собственными волнами* (частотами) системы. Именно они возникают в системе, если возбудить ее и предоставить самой себе. Число собственных частот (теоретически) неограниченно велико. Практически, однако, удастся возбудить лишь несколько первых (самых низких) частот.

8.6. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

Вернемся к волнам, распространяющимся на поверхности воды или в пространстве. Если волна встречает на своем пути препятствие, линейные размеры которого соизмеримы с длиной волны, то она деформируется и огибает препятствие, что легко показать на водяных волнах, ставя на их пути небольшие преграды или сплошной экран с небольшими отверстиями. Отклонение волны от прямолинейного распространения (огибание препятствий) называется *дифракцией*.

Для определения волнового фронта при дифракции и других отклонениях от прямолинейного распространения современник Ньютона Х. Гюйгенс (1629—1695) предложил принцип, физическое содержание которого будет раскрыто в оптике. Этот принцип заключается в следующем. Если известно положение волнового фронта в момент t , направление распространения волны и скорость ее распространения v , то нужно каждую точку волнового фронта рассматривать как источник элементарных когерентных волн (распространяющихся только вперед!). Построив части шаровых элементарных волн, опирающиеся на мгновенный волновой фронт и имеющие радиус $v\Delta t$, и проведя их огибающую, получим положение волнового фронта в момент $t + \Delta t$. В такой форме принцип ничего не говорит о распределении амплитуд по волновому фронту.

Поставим на пути волны непрозрачный экран с небольшим отверстием. Согласно принципу Гюйгенса огибающая элементарных волн, выходящих из отверстия, оказывается почти полусферой, так как такое отверстие подобно точечному источнику волн. Если же на пути волны имеется ряд малых отверстий (рис. 8.11), то огибающая будет почти плоской, но амплитуды на ней будут распределены очень неравномерно.

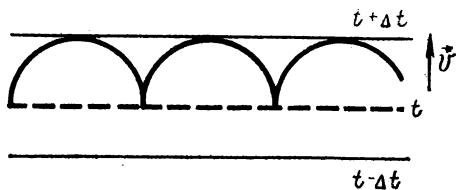


Рис. 8.11

Применим принцип Гюйгенса к выводу законов отражения и преломления. Пусть плоская волна падает на плоскую границу раздела AD двух сред (рис. 8.12). Изучим сначала отражение. Положение волнового фронта в момент t показано линией AB . К моменту $t + \Delta t$ колебания, идущие по направлению BD , достигнут границы раздела. Но за это время уже образуются отраженные волны, изображенные на рисунке. Их огибающая CD определит положение волнового

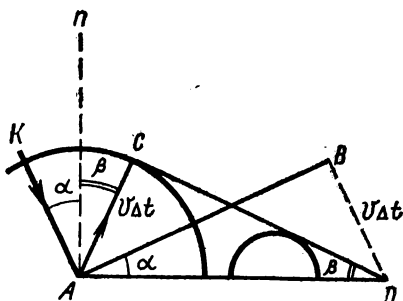


Рис. 8.12

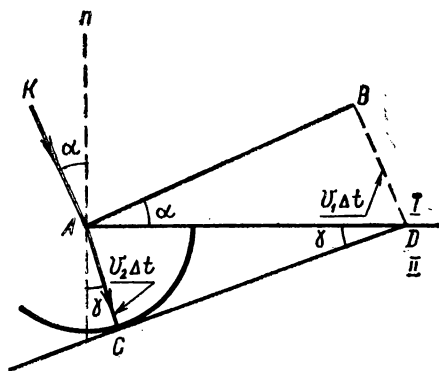


Рис. 8.13

фронта в момент $t + \Delta t$. Из равенства треугольников ABD и ACD получаем:

$$\alpha = \beta, \quad (8.30)$$

т. е. угол падения равен углу отражения.

Падающий луч KA , перпендикуляр n , восставленный из точки падения луча к границе раздела, и отраженный луч AC лежат в общей плоскости (плоскости падения), причем углы падения и отражения располагаются по обе стороны перпендикуляра n .

Одновременно с отражением имеет место и прохождение волны во вторую среду. Пусть скорости распространения волн в обеих средах равны соответственно v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$). Линия AB (рис. 8.13) представляет плоский волновой фронт в момент t . Линия CD соответствует волновому фронту в момент $t + \Delta t$. Из треугольников ABD и ADC получаем:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{v_1 \Delta t}{AD}; \quad \sin \gamma = \frac{v_2 \Delta t}{AD}; \\ \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} &= \frac{v_1}{v_2}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

При этом падающий KA и преломленный AC лучи и перпендикуляр n , восставленный из точки падения луча к поверхности раздела, лежат в плоскости падения.

Постоянное (не зависящее от угла падения) отношение

$$\frac{v_1}{v_2} = n_{21} \quad (8.32)$$

называют *относительным показателем преломления*.

В заключение сделаем следующее замечание. Мы изучали волны на простейших примерах, когда тригонометрическая форма записи соответствующих выражений не приводила к математическим трудностям при их преобразованиях. На практике часто приходится сталкиваться со значительно более сложными волновыми явлениями. При их исследовании, как и при изучении колебаний в системах с одной степенью свободы, с успехом применяется метод комплексных амплитуд, в чем мы убедимся при изучении электромагнитных колебаний.

9.1. ВОЛНОВАЯ ПРИРОДА ЗВУКА

Акустикой называют учение о распространении, возбуждении и восприятии упругих звуковых волн. Очевидно, прежде всего нужно доказать на опыте, что звук имеет волновую природу.

Известный опыт со звонком, помещенным под колокол воздушного насоса, и последующей откачкой воздуха из-под колокола доказывает, что для распространения звука необходима упругая среда. Волновые свойства звука обнаруживаются в интерференционных опытах (в частности, в опытах по стоячим волнам) и при явлении резонанса. Для наблюдения интерференции звука в аудитории нужно расположить два громкоговорителя, питаемых от одного звукового генератора, на расстоянии в несколько метров друг от друга, и перемещаться на несколько десятков сантиметров параллельно линии, соединяющей громкоговорители. Большое расстояние между источниками необходимо для того, чтобы наибольшая разность хода волн, создаваемых громкоговорителями, была не слишком мала (см. § 8.4).

Стоячую звуковую волну можно создать в газовом столбе. Металлическая труба с массивными стенками с одной стороны закрыта массивным металлическим диском, а с другой — тонкой резиновой мембраной. Вдоль образующей трубы просверлен ряд близких (5—7 мм) отверстий. Кроме того, имеется отверстие для впуска в трубу светильного газа. Перед опытом труба заполняется газом, и у всех отверстий зажигаются небольшие язычки пламени. Получается линия одинаковых язычков, так как условия горения для всех отверстий практически одинаковы. Затем у резиновой мембраны устанавливается громкоговоритель, питаемый от звукового генератора. Изменяя частоту генератора, можно получить в трубе стоячую волну, что скажется на свечении газа: звуковое давление вдоль оси трубы распределяется неравномерно, образуются узлы и пучности давления. Поэтому и условия свечения газа периодически меняются вдоль трубы. В этом опыте легко измерить длину волны.

Меняя частоту возбуждения, можно убедиться в том, что газовый столб имеет несколько собственных частот (см. § 8.5).

При обычно применяемых в опытах частотах, хорошо воспринимаемых человеческим ухом (около 1000 Гц), длина звуковой волны в воздухе составляет 0,2—0,3 м. В светильном газе она несколько больше, так как его молярная масса меньше, чем воздуха.

Резонансные свойства акустических систем можно показать на следующих опытах:

1. Если возбудить камертон, держа его в руке, то слышен слабый звук: поверхность колеблющихся ножек мала и отдача звука во внешнее пространство (излучение) невелика. Если же поставить камертон на приданный ему резонансный ящик (четвертьволновая труба, имеющая один открытый и один закрытый конец), то излучение резко возрастет за счет увеличения размеров излучающей поверхности (открытый конец ящика). Однако если камертон ставят на ящик, рассчитанный для камертона иной частоты, то заметного усиления звука не наблюдается, так как отсутствует явление резонанса.

Отметим попутно, что, когда ставят звучащий камертон на крышку стола, излучение звука обычно заметно возрастает. Дело в том, что крышка стола (мембрана) обладает большим числом собственных частот, одна из них может оказаться близкой к собственной частоте камертона.

Как известно, камертон отличается весьма чистым музыкальным звуком — физически этому отвечают почти чисто гармонические колебания; получение их обеспечивается специальной формой, которую имеют ножки камертона, и его высокой добротностью.

2. Поставив на некотором расстоянии друг от друга два одинаковых камертона на резонансных ящиках и возбудив один из них, можно затем заглушить колебания возбудителя; при этом будет слышен (более слабый) звук второго камертона, пришедшего в резонансные колебания. Если же слегка изменить частоту одного из камертонов, надев на ножку небольшой груз (при этом частота уменьшается), то резонансного возбуждения не происходит. Зато при одновременном возбуждении обоих камертонов в первом случае (равные частоты) слышен звук определенной частоты с медленно уменьшающейся громкостью (вследствие затухания камертонов); во втором же случае (немного различные частоты) отчетливо слышны звуковые биения, частоту которых можно регулировать перемещением грузика вдоль ножки камертона (см. § 1.7).

9.2. ИСТОЧНИКИ И ПРИЕМНИКИ ЗВУКА

Возбуждение звука производится различными устройствами, их можно разбить на две существенно различные группы: а) источники, работающие на собственной частоте, и б) источники, работающие на вынужденных частотах.

а) На собственных частотах работают камертоны, струны и воздушные столбы, используемые в различных музыкальных инструментах. Собственная частота колебаний струны может изменяться при изменении ее натяжения или длины; кроме того, в зависимости от места возбуждения струны (смычком) изменяется относительная интенсивность возникающих обертонов, что определяет тембр звука. Убедиться в сложности звука музыкальных инструментов мож-

но, наблюдая форму кривой создаваемого ими звукового давления при помощи микрофона и осциллографа или анализатора спектра.

Так как интенсивность излучения звука зависит от размеров излучающей поверхности, то струнные инструменты снабжаются резонансными ящиками (объем, занятый воздухом в деке скрипки или рояля), обладающими многими резонансными частотами в области звуков, порождаемых инструментом.

Органные трубы имеют определенные собственные частоты. Духовые инструменты — это те же трубы, но с регулируемой собственной частотой; для усиления излучения звука выходные отверстия труб духовых инструментов увеличиваются.

б) Существуют также акустические приборы, воспроизводящие или воспринимающие самые разнообразные звуки: к первым относятся телефоны и громкоговорители, ко вторым — микрофоны. Эти приборы работают на вынужденных колебаниях, и резонансные явления были бы здесь очень вредны, так как одним из основных требований к этой аппаратуре является ее широкополосность, т. е. способность воспроизводить без искажения звуки в широком диапазоне частот (от десятков герц до нескольких килогерц). Присутствие резонанса (или резонансов) делает амплитудно-частотную характеристику устройства неравномерной, что приводит к искажению истинного соотношения интенсивностей отдельных спектральных составляющих сложного звука и, конечно, нежелательно. Для устранения резонансов нужно либо убрать все собственные частоты, характерные для аппаратуры, из рабочей области частот (что практически трудно), либо же резко снизить добротность системы. Именно по последнему пути и идут на практике. Достаточно сравнить длительность звучания камертона (после его возбуждения) и громкоговорителя (после выключения тока), чтобы ясно уловить различие в их добротности.

К основным частям наиболее распространенных в настоящее время динамических громкоговорителей относятся: магнит (или электромагнит), создающий радиальное магнитное поле; токовая катушка, способная двигаться в этом поле и связанная с большой конусообразной мембраной — диффузором. При пропускании по катушке тока звуковой частоты катушка под действием силы Ампера приходит в вынужденные колебания и колеблет диффузор, создающий в окружающем пространстве звуковые упругие волны.

Амплитудно-частотная характеристика громкоговорителя, т. е. зависимость амплитуды A излучаемого звука от частоты f (при постоянной амплитуде тока в катушке), изображена на рисунке 9.1.

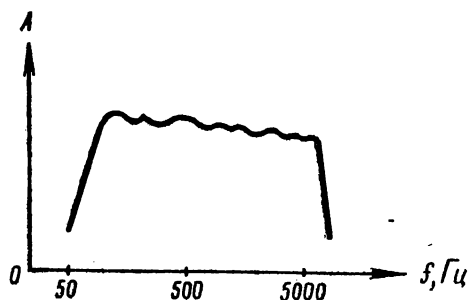


Рис. 9.1

Идеальная характеристика была бы совершенно горизонтальной во всем интервале слышимых частот.

Аналогично устройство электродинамических телефонов. Более распространенные электромагнитные телефоны имеют постоянный магнит, расположенный вблизи стальной мембраны. На магнит намотана катушка, обтекаемая током звуковой частоты. Магнитная индукция постоянного магнита B_0 превышает амплитуду переменной магнитной индукции B_m . Так как сила взаимодействия магнита с мембраной пропорциональна квадрату магнитной индукции, то получается:

$$F \sim (B_0 + B_m \cos \Omega t)^2 = \\ = B_0^2 + 2B_0 B_m \cos \Omega t + \frac{B_m^2}{2} + \frac{B_m^2}{2} \cos 2\Omega t.$$

Таким образом, телефон работает с искажениями — появляется двойная частота, но амплитуда ее относительно невелика.

Применяемые в акустических приборах мембраны представляют собой двумерную колебательную систему, обычно закрепленную по краям. Такая система обладает несколькими собственными частотами, зависящими от геометрии мембраны и способа ее закрепления. При возбуждении она приходит в поперечные колебания и в ней устанавливаются стоячие волны. Распределенные по поверхности линии узлов и пучностей смещения можно наблюдать, предварительно насыпав на мембрану тонкий слой легкого порошка или песка: частицы сбрасываются с линий пучностей смещения и собираются в узлах (фигуры Хладни).

Кроме частотной характеристики излучателя, большое практическое значение имеет его характеристика направленности, т. е. зависимость излучения от направления. Откладывая в некотором масштабе отрезки, соответствующие интенсивности излучения в различных направлениях, и соединяя их концы плавной кривой, получают диаграмму направленности. Эта диаграмма тем острее, чем меньше отношение длины излучаемой волны к поперечному размеру излучателя (к его диаметру). Поэтому диаграммы излучателя расширяются для низких частот. У акустических излучателей направленность невелика, в чем легко убедиться, проходя мимо звучащего уличного громкоговорителя.

Наиболее распространенными приемниками звука являются микрофоны, позволяющие управлять электрическим током в цепи при помощи звуковых колебаний, воспринимаемых мембраной микрофона. Электромагнитный телефон может служить и микрофоном, если включить его в цепь постоянного тока и создавать перед мембраной звуковое давление. Изменения зазора между мембраной и полюсами магнита вызовут изменения магнитной индукции и породят переменную составляющую тока звуковой частоты.

Широко распространены более чувствительные (хотя и менее свободные от искажений) угольные микрофоны. В них мембрана опирается на капсулу с угольным порошком и при колебаниях

вызывает изменения сопротивления порошка. Микрофон включен в цепь постоянного тока, соединенную через трансформатор с телефонной сетью; Переменная составляющая тока создает ЭДС индукции во вторичной обмотке трансформатора. В конденсаторном микрофоне мембрана в то же время служит одной из обкладок конденсатора C , включенного последовательно с резистором R в цепь постоянного тока (рис. 9.2). При колебаниях мембраны меняется емкость (и заряд) конденсатора и в цепи получается пульсирующий ток.

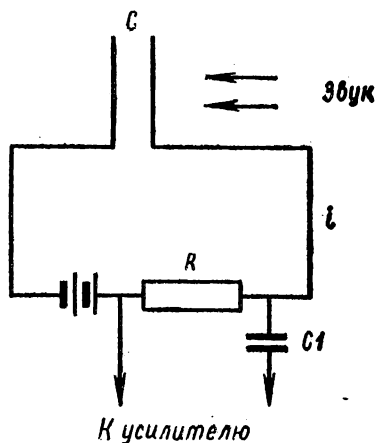


Рис. 9.2

Переменное напряжение $u = iR$, создающееся на резисторе, снимается через разделительный конденсатор $C1$ (чтобы избежать постоянного тока) и подается на усилитель или в телефонную сеть. Частотная характеристика микрофона (зависимость выходного напряжения от частоты при заданной амплитуде звукового давления) должна быть горизонтальна во всем диапазоне слышимых частот. Фактически она несколько искажена, как и у телефона.

9.3. ФИЗИОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

Остановимся вкратце на важнейших вопросах физиологической акустики. Нормальное человеческое ухо воспринимает звуки с частотами от 20 Гц до 20 кГц, но его чувствительность к различным частотам неодинакова. На рисунке 9.3 нижняя кривая соответствует наименьшей интенсивности звука (данной частоты), еще воспринимаемой на слух, — она называется *порогом слышимости*. Верхняя кривая (изученная хуже первой, так как ее изучение связано с опасностью для слухового аппарата человека) определяет интенсивность, при которой звуковое ощущение сопровождается ощущением боли — *болевой порог*. Вся область частот и интенсивностей между этими кривыми доступна слуховому восприятию. Поразительна ширина изменений интенсивностей, доступных уху: интенсивность может изменяться в миллиарды раз (у обычных измерительных приборов отношение наибольшего значения измеряемой величины к ее наименьшему значению редко превосходит несколько сотен). Но в действительности при разговорах и слушании музыки используется лишь небольшая часть доступных значений (заштрихованная область на рис. 9.3).

Приняв среднюю интенсивность слышимого звука равной 10^{-4} Вт/м² (при частоте 1000 Гц), находим амплитуду звукового

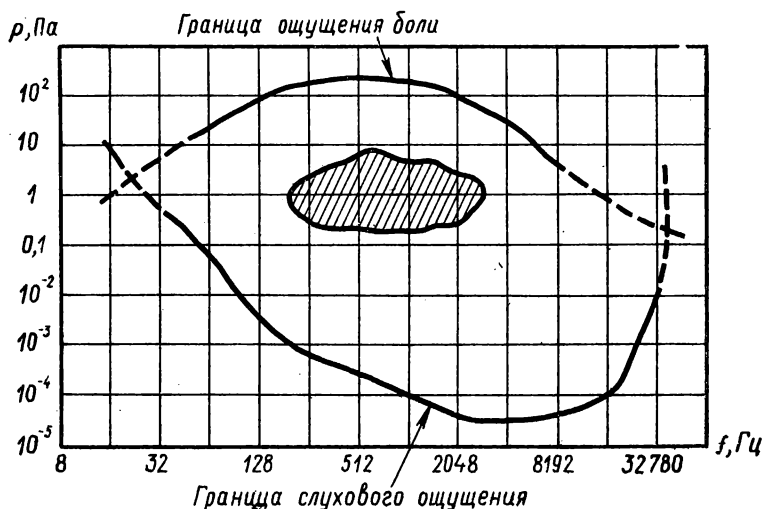


Рис. 9.3

давления (см. уравнение 8.18):

$$p_m = (2RI)^{\frac{1}{2}} = 0,3 \text{ Па},$$

что составляет весьма малую долю атмосферного давления p_0 — всего лишь $3 \cdot 10^{-6} p_0$.

Физическому понятию интенсивности звука соответствует физиологическое понятие громкости. Пусть пороговая интенсивность на некоторой частоте есть I_0 , а интенсивность данного звука той же частоты равна I . Величину

$$L_N = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

измеряемую в ф о н а х, называют *уровнем громкости*. Изменение уровня громкости в самом широком месте диаграммы слышимости, где интенсивности отличаются в 10^{12} раз, составляет:

$$L_N = 120 \text{ фонов.}$$

Существует и иная мера интенсивности, применяемая не только в акустике, но и в радиотехнике и других разделах науки и техники.

За наименьшую стандартную интенсивность принимают интенсивность I_0 при частоте, определяемой конкретными условиями эксперимента. Тогда *уровень звуковой мощности* любой волны (независимо от частоты), имеющей интенсивность I , по определению, равен:

$$L_P = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (9.1)$$

Эта величина измеряется в д е ц и б е л а х (дБ).

Физической характеристике — частоте — соответствует физиологическая характеристика — высота тона. Если звук не сложный, то она поддается количественной оценке (музыкальные гаммы). Если звук сложен, высота может оцениваться только качественно.

Наконец, сложный спектральный состав звука (физическая характеристика) физиологи описывают характеристикой «тембр», которая физически не поддается количественной оценке.

Замечательной особенностью уха является его способность реагировать только на высоту тона и амплитуду, но не на фазовые сдвиги в сложном звуке. Эта особенность была открыта Омом. Справедливость этого закона Ома видна из того, что все слушатели в зале воспринимают мелодию одинаково, хотя, конечно, фазовые соотношения звуков, излучаемых разными инструментами, меняются при переходе зрителя из одного угла зала в другой.

Имея два уха, мы можем определять направление, по которому приходит звук: мы поворачиваем голову, пока ощущения в обоих ушах не станут равными. Однако при этом возможны ошибки в оценке направления (спереди или сзади).

Если требуется получить сложный звук из известных его составляющих, то следует стремиться не к воспроизведению формы кривой звукового давления, но к правильному воспроизведению амплитуд и частот.

На рисунке 1.13 были изображены две кривые тока звуковой частоты, полученные при одних и тех же частотах и амплитудах, но при различных начальных фазах слагающих колебаний. Хотя кривые имеют различный вид, но на слух оба звука, полученных при обтекании этими токами обмоток громкоговорителя, кажутся совершенно одинаковыми.

Механизм создания звуков человеком в общих чертах таков: мы выдыхаем воздух через голосовые связки, находящиеся в нижней части горла, бессознательно регулируя их положение. Выходящая в полость рта струя воздуха совершает автоколебания. Собственные частоты полости регулируются положением языка, зубов и губ. Полость резонирует и обеспечивает достаточно мощное излучение звука. Если выдохнуть воздух и вдохнуть, например, гелий, то произносимые затем звуки имеют тембр, совершенно отличный от обычного тембра, так как замена воздуха гелием повышает резонансные частоты полости рта.

При произнесении той или иной гласной (на какой бы частоте она ни произносилась) в спектре звука обязательно присутствуют одна или две частоты, почти не меняющиеся при переходе от низких тонов к высоким (форманты гласной). Каждой гласной отвечают свои форманты.

Если воспроизводить звук, записанный на патефонной пластинке, вращая ее быстрее, чем она вращалась при записи (например, со скоростью 45 об/мин вместо нормальных 33,3 об/мин), то все основные частоты и все форманты будут воспроизведены с частотами, увеличенными в 1,35 раза. При этом (относительно небольшом)

изменении частот все звуки воспринимаются как более высокие, но разборчивость речи еще сохраняется. Если же при воспроизведении звука выбрать еще большую скорость вращения пластинки (например, 78 об/мин), то наряду с резким повышением всех тонов совершенно исчезнет разборчивость, так как из-за сильного изменения частоты формант одни гласные превратятся в другие.

9.4. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Если источник звука (или наблюдатель) движется относительно воздуха, то частота воспринимаемого звука отличается от частоты испускаемого звука. Это явление открыто Д о п л е р о м и носит его имя.

Укрепив телефонную капсулу, питаемую током звуковой частоты, на конце длинного (1,5—2 м) шнура, можно, вращая капсулу перед аудиторией, показать эффект Доплера сразу большому числу слушателей.

При теоретическом рассмотрении явления следует подчеркнуть, что все скорости (звука, наблюдателя и источника) отсчитываются относительно воздуха — той среды, где распространяется звук.

Пусть в покоем воздухе, с которым связана система отсчета, находятся наблюдатель и источник звука, излучающий звук частотой f_0 (длина волны в воздухе при этом равна λ_0). Если и источник и наблюдатель покоятся относительно воздуха, то наблюдатель воспринимает звук той же частоты f_0 , так как число волн N_0 , порождаемых источником в единицу времени, равно числу волн, воспринимаемых наблюдателем за то же время.

Если наблюдатель приближается к источнику со скоростью u_n (это и последующие движения происходят по прямой, соединяющей источник с наблюдателем), то ежесекундно принимаемое им число волн увеличится и составит:

$$N = N_0 + \frac{u_n}{v},$$

где v — скорость звука относительно воздуха. Поэтому и частота, воспринимаемая движущимся наблюдателем, возрастет до значения

$$f_1 = f_0 \left(1 + \frac{u_n}{v} \right). \quad (9.2)$$

При удалении наблюдателя от источника число воспринимаемых им волн (и, следовательно, воспринимаемая частота) будет уменьшаться. Новое значение частоты равно:

$$f_2 = f_0 \left(1 - \frac{u_n}{v} \right). \quad (9.3)$$

Пусть теперь наблюдатель неподвижен, а источник приближается к нему со скоростью u_n . Тогда длина волны, воспринимаемая наблюдателем, сократится (по сравнению с λ_0) на

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{u_n}{v}.$$

Но так как между частотой и длиной волны существует известная связь:

$$f = \frac{v}{\lambda},$$

то воспринимаемая наблюдателем частота окажется равной:

$$f_s = f_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \Delta\lambda} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{u_n}{v}}, \quad (9.4)$$

т. е. частота увеличивается. По тем же причинам при удалении источника от наблюдателя длина волны, воспринимаемая последним, возрастет, а частота уменьшится до значения

$$f_4 = f_0 \frac{1}{1 + \frac{u_n}{v}}. \quad (9.5)$$

Формулы (9.2—9.5) можно объединить в следующую:

$$f = f_0 \frac{1 \pm \frac{u_n}{v}}{1 \mp \frac{u_n}{v}}, \quad (9.6)$$

где скорости u_n и u_n положительны, верхние знаки соответствуют сближению, нижние — удалению.

При малых значениях $\frac{u}{v}$, когда можно пренебречь вторыми степенями $\frac{u}{v}$, эта обобщенная формула приводится к виду:

$$f = f_0 \left[1 \pm \frac{u_n}{v} \pm \frac{u_n}{v} \right]. \quad (9.7)$$

В заключение подчеркнем еще раз, что все скорости отсчитываются относительно воздуха, т. е. среды, где распространяется волна. Позже мы увидим, что эффект Доплера имеет место и в оптике; но в силу особенностей, присущих распространению света, рассчитывают его иначе.

Если бы при движении источника или наблюдателя не происходило возмущений воздуха, то в случае удаления источника со звуковой скоростью, как показывает формула (9.5), частота уменьшилась бы вдвое.

Частота возрастает вдвое, если наблюдатель будет приближаться к источнику со звуковой скоростью (формула 9.2).

Если наблюдатель удаляется со звуковой скоростью, то частота воспринимаемого звука, как видно из формулы (9.3), обращается в нуль. Смысл этого ясен: наблюдатель движется вместе со звуковой волной и никаких изменений звукового давления не воспримет.

Наконец, если источник приближается к наблюдателю со звуковой скоростью, то частота воспринимаемого звука неограниченно возрастает (формула 9.4). Действительно, при приближении u_n к v длина воспринимаемой волны сокращается, стремясь к нулю, так что все колебания, испускаемые источником, приходят к наблюдателю практически одновременно.

9.5. УЛЬТРАЗВУКИ И ИНФРАЗВУКИ

Длина волны слышимых звуков довольно велика, а размеры звуковых излучателей обычно не слишком велики, поэтому, как правило, диаграмма направленности звуковых излучателей (§ 9.2) сравнительно широка. Гораздо большая направленность получается при создании ультразвуковых колебаний (частоты от 20 кГц до миллионов герц). Для их возбуждения используются два эффекта: пьезоэлектрический и магнитострикционный.

Пьезоэлектрический эффект состоит в способности некоторых кристаллов, в частности кварца, изменять размеры при создании в кристалле электрического поля.

Пусть h — толщина плоской пластинки кварца, т. е. расстояние между электродами, которые приклеиваются к его поверхности. Тогда собственные частоты колебаний пластинки определяются выражением:

$$f = \frac{v}{2h} k$$

($k=1, 2, \dots, v$ — скорость ультразвука в кварце), так как при собственных колебаниях на толщине h уложится целое число полуволн.

Подавая на электроды напряжение, меняющееся с частотой f , можно привести пластину в интенсивные вынужденные резонансные колебания, и она станет мощным излучателем ультразвука. Для лучшего излучения акустические сопротивления кварца и среды, воспринимающей излучения, должны быть близки друг к другу; поэтому ультразвуки хорошо излучаются в жидкость, а также в твердое тело. Кварцевые пластины способны излучать ультразвуковые колебания частотой от десятков до тысяч килогерц. Еще более высокие частоты получаются при возбуждении кварцевых пластин на обертонах.

Магнитострикционный эффект заключается в способности ферромагнитных тел изменять свои размеры при намагничивании. Если ферромагнитный стержень поместить в продольное магнитное поле, меняющееся с ультразвуковой частотой, то он приходит в вынужденные колебания; при резонансе амплитуда этих колебаний резко возрастает. Таким образом, стержень является ультразвуковым излу-

чателем. Такие излучатели хорошо работают при низких ультразвуковых частотах (от сотен килогерц и ниже).

Для приема ультразвуковых колебаний используются такие же кварцевые пластины (или ферромагнитные стержни), так как существуют обратные эффекты: кварцевая пластина при механических воздействиях электризуется, а стержень изменяет свое намагничивание. Поэтому, связав кварцевую пластину с электрическим усилителем, можно зарегистрировать периодические изменения ее электризации в ультразвуковом поле. Ферромагнитный стержень, находящийся в ультразвуковом поле и помещенный в катушку, периодически перемагничивается и возбуждает в катушке электродвижущую силу индукции, легко регистрируемую электрическими устройствами.

Применения ультразвуков весьма многочисленны, и здесь можно указать лишь важнейшие.

а) Так как диаграмма направленности ультразвукового излучателя может быть сделана очень узкой, а поглощение ультразвуковых волн в воде не слишком велико, то возможна ультразвуковая подводная связь на значительных расстояниях. В частности, посылая с движущегося судна ультразвуковой импульс на дно и принимая импульс, отраженный дном, можно (по времени распространения импульсов) определять глубину океана во все время движения судна.

б) Посылая ультразвуковой пучок в твердое тело, можно изучать микроструктуру вещества и находить макроскопические неоднородности, не разрушая исследуемый образец.

в) Так как в ультразвуковой волне (благодаря высокой частоте) создаются громадные ускорения (в сотни раз превышающие ускорение свободного падения), то возможно получение различных физически интересных эффектов, не достижимых иными способами (например, получение эмульсий, кавитаций и др.).

Инфразвуковыми волнами называются волны, соответствующие очень низким частотам (ниже 20 Гц). Укажем два интересных проявления этих волн. При волнении на море ветер, дующий вдоль поверхности моря, вызывает возникновение (в воздухе) колебаний с длиной волны, соответствующей расстоянию между гребнями водяных волн, — этому как раз и отвечают сверхнизкие частоты. Распространяясь в воздухе со скоростью, превышающей скорость распространения ветра и скорость распространения штормовых волн в море, инфразвуковые воздушные волны, достигая берега, служат предупреждением о приближающемся шторме. Инфразвуковые волны возникают в земной коре при землетрясениях и позволяют судить о местоположении очага землетрясения.

10.1. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. ЗАКОН АРХИМЕДА

Движение жидкостей и газов, конечно, подчиняется законам механики Ньютона. Однако так как эти тела, в отличие от твердых тел, не сопротивляются изменению формы и могут изменять объем при изменениях внешнего давления, то их движение обладает особенностями. Поэтому принято выделять учение о движении этих тел в особый раздел.

Равновесное состояние (статика) жидкостей и газов подробно изучается в средней школе. Но мы уделим этому вопросу некоторое внимание для более глубокого его обсуждения.

Если жидкость заполняет часть сосуда, имеющего твердые стенки, и обладает свободной поверхностью (граничащей с газом), то равновесие жидкости возможно лишь при условии, что действующие силы во всех точках свободной поверхности перпендикулярны ей. Действительно, если бы существовали силы, направленные вдоль поверхности, они сразу же вызвали бы перемещение верхних слоев жидкости. Именно поэтому в сосуде, неподвижном относительно Земли, свободная поверхность горизонтальна. Если же сосуд движется (например, вращается вокруг вертикальной оси), то при установившемся движении свободная поверхность, как мы видели в главе 5, принимает форму параболоида вращения, чем и обеспечивается действие силы, создающей центростремительное ускорение.

Принято различать силу давления $d\vec{F}$ на некоторую элементарную площадку $d\vec{S}$ и давление p — скалярную величину, связанную с силой давления соотношением:

$$d\vec{F} = p d\vec{S}. \quad (10.1)$$

Пусть жидкость находится в равновесии и испытывает внешнее давление (например, атмосферное). Выделим мысленно внутри жидкости произвольную площадку. Так как она находится в равновесии, то испытываемые ею силы давления не зависят от ориентации площадки. Иначе говоря, внешнее давление передается жидкостью во все стороны равномерно, — это и есть известный закон Паскаля (Б. Паскаль, 1623—1662). Для строгого обоснования этого закона удобно применить так называемый «принцип отвердевания», предложенный С. Стевином (1548—1620) еще в XVII в.

Рассмотрим жидкость, находящуюся в открытом сосуде, и мысленно выделим в ней произвольную призму (рис. 10.1, а). Пусть внешнее давление на жидкость равно $p_{\text{вн}}$. Силу тяжести пока учитывать не будем (это возможно, так как в соответствии с принципом суперпозиции действия сил независимы); но нельзя сказать, что сила тяжести отсутствует, так как при этом поверхность жидкости не была бы плоской.

Вообразим, что выделенная призма затвердела, не меняя объема и формы. Тогда она будет оставаться в равновесии, и к ней можно приложить законы равновесия твердого тела: сумма сил, действующих на призму, должна равняться нулю. Силы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, действующие на соответствующие грани (рис. 10.1, б), перпендикулярны граням 1, 2, 3 и образуют треугольник, подобный треугольному сечению призмы ABC . Поэтому можно написать:

$$\frac{f_1}{h_1} = \frac{f_2}{h_2} = \frac{f_3}{h_3},$$

где h_i — длины соответствующих ребер призмы (рис. 10.1, в). Силы, действующие на грани 4, 5, расположенные симметрично, очевидно, равны по модулю и противонаправлены.

Умножив все знаменатели на длину ребра H , мы не нарушим равенства, но в знаменателях получатся площади граней ($S_i = h_i H$):

$$\frac{f_1}{S_1} = \frac{f_2}{S_2} = \frac{f_3}{S_3}.$$

Если призма мала, то каждое из этих соотношений определяет давление на соответствующую грань, поэтому

$$p_1 = p_2 = p_3. \quad (10.2)$$

Грань 1 лежала на поверхности жидкости, так что давление p равняется $p_{\text{вн}}$. Таким образом, закон Паскаля доказан.

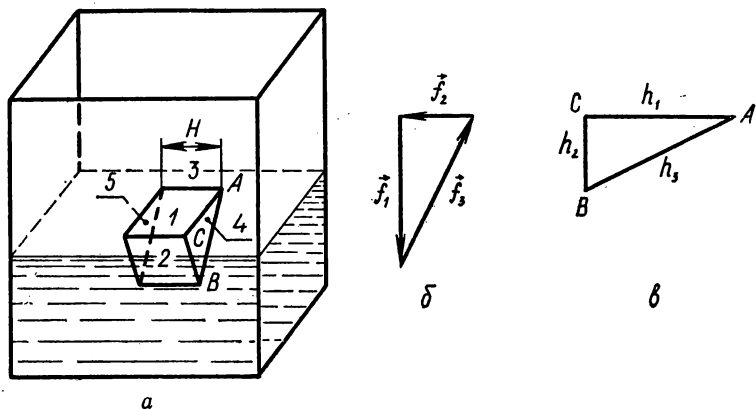


Рис. 10.1

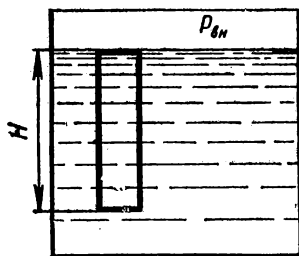


Рис. 10.2

Кроме внешних сил, могут существовать (и обычно существуют) силы, действующие на каждый элемент объема жидкости. Это прежде всего силы тяжести. Такие силы называют массовыми (или объемными).

Выделим в жидкости, находящейся в состоянии равновесия, вертикальный цилиндр с основанием $S=1 \text{ м}^2$ и высотой H (рис. 10.2). Пусть плотность жидкости ρ , и жидкость практически несжимаема.

Если цилиндр «затвердеет», то к нему можно применить условия равновесия твердого тела. На нижнюю грань действует сила внешнего давления $p_{\text{вн}}S$ и вес цилиндра ρgHS . Эти силы уравниваются силой давления, действующей снизу. Следовательно,

$$p = p_{\text{вн}} + \rho gH. \quad (10.3)$$

Итак, к внешнему давлению добавляется давление массовой силы (весовое давление), обязанное вышележащим (по отношению к рассматриваемому сечению) слоям жидкости. Это легко обнаружить, перемещая внутри жидкости небольшой низкий цилиндр, одно из оснований которого закрыто мембраной. Цилиндр заполнен воздухом, и его полость соединяется с манометром.

Как следствие закона (10.3) получается з а к о н А р х и м е д а. Действительно, выделим внутри жидкости произвольный объем V и применим принцип отвердевания. Равновесие возможно лишь при условии, что вес жидкости в этом объеме уравнивается силами, действующими со стороны окружающих слоев, причем направление равнодействующей этих сил должно проходить через центр тяжести (иначе возникло бы вращение объема). Следовательно, эта равнодействующая и есть архимедова сила:

$$\vec{F}_A = -\rho V \vec{g} = -m \vec{g}. \quad (10.4)$$

Если удалить затвердевший объем и заменить другим телом той же формы, то действие окружающих слоев не изменится, т. е. сила Архимеда сохранится.

В случае, когда внесенное тело однородно, его поведение определяется только соотношением между плотностями тела ρ_t и жидкости ρ_j . При $\rho_t < \rho_j$ тело всплывает, при $\rho_t > \rho_j$ — тонет. Если же тело неоднородно, так что его центр тяжести не совпадает с центром тяжести вытесненного им объема жидкости, то возникает еще вращение тела.

Давление жидкости на дно сосуда должно определяться весом столба жидкости с единичным основанием, опирающимся на дно:

$$p = \rho gh.$$

Но сила, действующая со стороны жидкости на опору, поддерживающую сосуд, конечно, должна равняться полному весу жидкости, заполняющей сосуд (рис. 10.3, а). В случае, поясняемом рисунком 10.3, б, к силе давления жидкости на дно прибавляется вертикальная составляющая сил давления жидкости на стенки, жестко связанные с дном. Для случая, представленного на рисунке 10.3, в, вторая сила вычитается из силы давления на дно.

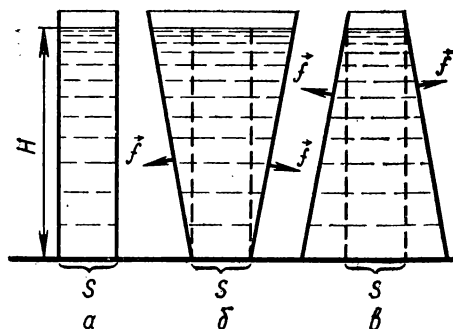


Рис. 10.3

Но вторая сила вычитается из силы давления на дно.

Так как газы, подобно жидкостям, обладают упругостью объема (но не формы), то статика газов не отличается от статистики жидкостей. Различие возникает лишь из-за сравнительно легкой сжимаемости газов. Поэтому при больших объемах приходится учитывать различие в плотности газа в разных его слоях. Это усложняет расчеты, но не вносит чего-либо принципиально нового.

Рассчитаем зависимость атмосферного давления от высоты. Выберем ось координат h (рис. 10.4) и построим мысленно прямой цилиндр, нижнее основание которого совпадает с поверхностью Земли, где имеется давление p_0 . На высоте h давление будет меньше; обозначим его p . На высоте $h+dh$ давление еще меньше: $p+dp$. При этом

$$dp = -\rho g dh,$$

где ρ — плотность газа. Если температура газа постоянна по всей высоте столба, то между давлением и плотностью, по закону Бойля — Мариотта, существует простая связь:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Тогда легко выполнить интегрирование и найти давление:

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h \right). \quad (10.5)$$

Эта формула, называемая *барометрической*, строго верна для совершенно спокойной атмосферы постоянного состава и постоянной температуры.

Из соотношения (10.5), в частности, следует, что состав атмосферы должен с высотой изменяться — доля более тяжелых газов (кислород, азот) должна уменьшаться при увеличении высоты над Землей за счет увеличения доли легкого водорода. В самом деле, ведь полное давление есть сумма отдельных давлений, создаваемых различными газами (закон Дальтона), а убыль давления для газов

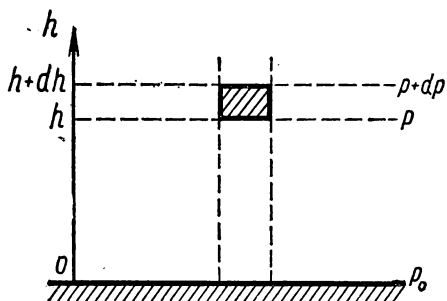


Рис. 10.4

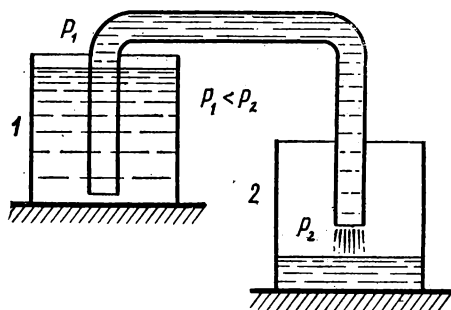


Рис. 10.5

большей плотности должна происходить быстрее. В действительности состав атмосферы вплоть до довольно больших высот (порядка десятка километров) не меняется, что можно объяснить неучтенными при выводе формулы (10.5) явлениями перемешивания. Мы еще вернемся в молекулярной физике к формуле (10.5) и уясним ее глубокий физический смысл. Сейчас отметим, что для практических целей удобно выразить высоту в километрах и, подставив величины, характеризующие воздух при нормальных условиях: $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$; $p_0 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Па}$, получить следующее выражение:

$$p = p_0 \exp(-Ah),$$

где $A = 0,125 \text{ км}^{-1}$.

На высоте величайшей вершины мира — Джомолунгмы ($h \approx 9 \text{ км}$) — давление должно равняться:

$$p \approx 0,3 p_0,$$

что более или менее хорошо отвечает действительности.

В заключение изучения гидростатики остановимся на довольно распространенном ошибочном мнении, что сифон работает под действием атмосферного давления. Как известно, сифон — это изогнутая трубка, верхний конец ее (рис. 10.5) находится в сосуде 1, нижний — в сосуде 2. Если трубка была заполнена жидкостью, то происходит самопроизвольное перетекание ее в сосуд 2. Оно продолжается до тех пор, пока уровни жидкостей в обоих сосудах не сравняются либо же пока конец трубки не выйдет из жидкости (в сосуде 1). Очевидно, атмосферное давление на жидкость в первом сосуде меньше, чем во втором, — уже поэтому оно не может быть причиной перетекания.

Роль атмосферного давления сводится лишь к некоторому упрочнению струи (растворенные в жидкости газы не могут образовать больших пузырьков и нарушить целостность струи). Жидкость, освобожденная от растворенных газов (например, длительным кипячением), прекрасно течет и в вакууме; это происходит за счет разности весов столбов жидкости в обоих коленях трубки. Цепочка,

наброшенная на блок с горизонтальной осью вращения, сбегает в сторону более длинного своего конца, подтверждая сказанное выше о работе сифона.

10.2. СЛОИСТОЕ (ЛАМИНАРНОЕ) И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ СТРУИ

Переходя к изучению движения жидкостей и газов, сразу же отметим, что возможность перемешивания слоев жидкости существенно усложняет ее движение по сравнению с движением твердого тела.

Простой опыт убеждает в возможности течения двух типов: по сравнительно широкой трубе течет стационарный поток воды. Узкая трубка создает в центре трубы струю подкрашенной воды (рис. 10.6, а). При малых скоростях течения оба потока текут не смешиваясь. Течение, при котором струи не перемешиваются и в каждой точке сечения потока существует определенная скорость течения, называется *стационарным слоистым (ламинарным)*. В этом случае можно ввести понятие о *линии тока*—траектории отдельного элемента объема жидкости, не пересекаемой никакой другой линией тока. Совокупность таких линий тока, опирающаяся на некоторое элементарное сечение, называется *трубкой тока*. Трубки тока также не пересекаются друг с другом, и жидкость нигде не выходит через стенки трубки тока. Все сечение трубы, заполненной слоистым потоком жидкости, является макроскопической трубкой тока.

При увеличении скорости возникают более сложные явления. Струя окрашенной жидкости сначала начинает дрожать, а потом перемешивается с прозрачными струями, так что вся труба заполняется беспорядочно движущейся окрашенной жидкостью; в целом жидкость перемещается вдоль трубы (рис. 10.6, б); такое течение называют *турбулентным*. Оно, конечно, сложнее слоистого.

В реальных условиях стационарное слоистое течение происходит под действием внешних сил, так как оно сопровождается трением жидкости о стенки трубы и внутренним трением слоев, текущих с относительными скоростями, отличными от нуля. В идеализированном случае несжимаемой (что близко к действительности для жидкостей и часто выполняется и для газов) и лишенной трения жидкости (это допущение более грубо, но иногда приемлемо) течение ее по трубе постоянного сечения, расположенной горизонтально, могло бы происходить и без действия внешних сил, за счет первоначального импульса, сообщенного жид-

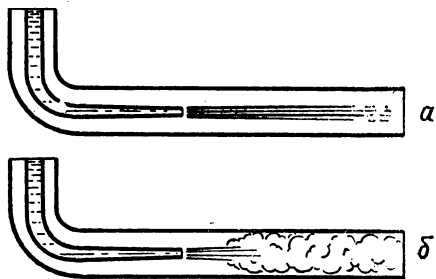


Рис. 10.6

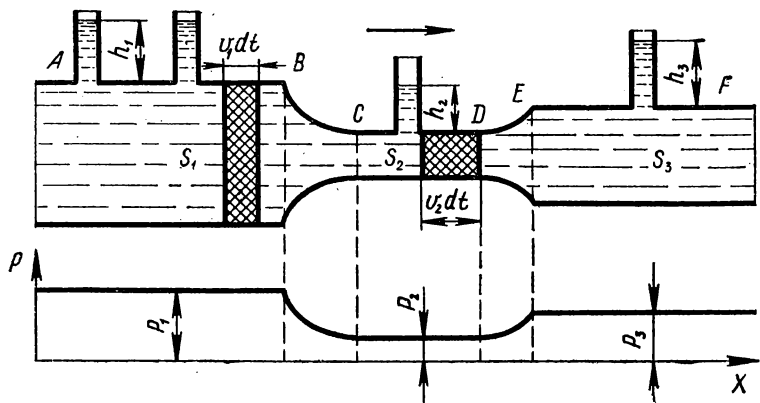


Рис. 10.7

кости. Но если сечение трубы меняется, а она заполнена жидкостью полностью, то условия течения и его описание усложняются. Через каждое сечение за одинаковые промежутки времени должна протекать одинаковая масса жидкости. Как видно из рисунка 10.7, эта масса может быть представлена произведением

$$\rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt = dm = \text{const}, \quad (10.6)$$

где S_i — сечение трубы, v_i — скорость в данном сечении, dt — выбранный промежуток времени, ρ_i — плотность жидкости. Уравнение (10.6) называется уравнением непрерывности струи. В случае несжимаемой жидкости ее плотность везде одинакова, и вместо (10.6) можно написать закон сохранения объема жидкости:

$$Sv = \text{const}. \quad (10.7)$$

Из этого выражения сразу же видно, что скорость течения обратно пропорциональна сечению (поэтому, например, через горные реки с быстрым течением переходят по возможности в широких местах). Но изменение скорости требует действия силы. Следовательно, на переходных участках BC и DE (где изменяется сечение трубы) должны возникать соответственно ускоряющие и замедляющие силы. Значит, давление на участке AB должно быть больше, чем на участке CD , а давление на участке CD должно быть меньше, чем на участке EF . На каждом из указанных участков (постоянное сечение трубы) давление должно сохраняться неизменным. В этом можно убедиться, снабдив трубу манометрами, сечение которых параллельно линиям тока. Если участок трубопровода невелик, так что трение сказывается незначительно, то распределение давлений, измеряемых манометрами (см. рис. 10.7), отвечает сделанным выше заключениям.

При закрывании трубы все давления выравниваются, так как течение жидкости прекращается. Рассмотренное давление называется статическим.

10.3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ. ИМПУЛЬС СТРУИ

Перейдем теперь к установлению законов стационарного слоистого течения идеальной жидкости. Для общности рассмотрим наклонный участок трубопровода, находящегося в поле земного тяготения (рис. 10.8). Трубопровод считаем целиком заполненным жидкостью во всех сечениях. Через сечение 1 за время dt пройдет масса жидкости dm , занимающая объем $S_1 v_1 dt$. За это же время через сечение 2 пройдет такая же масса, занимающая такой же объем $S_2 v_2 dt$, но с иной скоростью течения. Если поток стационарен, то в объеме, заключенном между сечениями 1' и 2, никаких изменений не произойдет, хотя одни частицы заменятся другими. Поэтому нужно исследовать только изменения, происшедшие с объемами 1 1' и 2 2'.

Работа внешних сил складывается из работы сил статического давления и работы силы тяжести. Эта работа определяет изменение кинетической энергии выделенных объемов. Запишем уравнение закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{1}{2} \rho v_2 S_2 dt v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1 S_1 dt v_1^2 = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 dt + dm g (h_1 - h_2),$$

где h_i — высоты центра тяжести объемов 1 1' и 2 2' над горизонтом. Переносим слагаемые с одинаковыми индексами в одну часть уравнения и сокращая на общую массу $v_i S_i dt \rho$, получаем в любом сечении:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const.} \quad (10.8)$$

Для удобства записи можно, конечно, умножить уравнение на плотность. Тогда мы придем к общепринятой форме записи уравнения Бернулли (Даниил Бернулли, 1700—1782) для стационарного слоистого потока идеальной жидкости:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{const.} \quad (10.9)$$

Силы трения учесть трудно. При их учете мы должны были бы написать:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_{\text{тр.}} \quad (10.10)$$

При этом, если сечение 1 расположено выше по течению, чем сечение 2, то слагаемое, учитывающее работу силы трения, отнесенную к единице объема жидкости, должно быть положительным. Следовательно, давление во втором

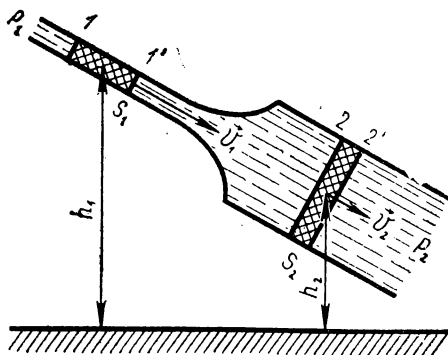


Рис. 10.8

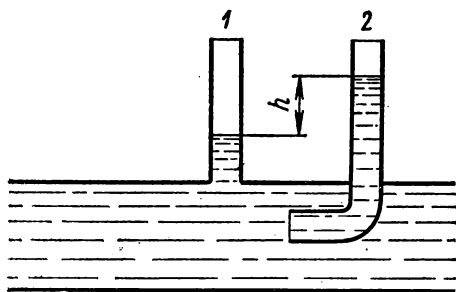


Рис. 10.9

сечении оказывается меньше, чем в идеализированном случае. Поэтому даже для течения по горизонтальной трубе постоянного сечения в реальных условиях требуется создание некоторой разности давлений. Она неизбежно существует во всех опытах и делается вполне заметной при достаточно длинных трубах.

Перейдем к обсуждению следствий из уравнения (10.9).

Для измерения статического давления, как мы уже видели, нужен манометр с сечением, параллельным линиям тока жидкости (1 на рис. 10.9). Для измерения второго слагаемого, иногда называемого динамическим давлением, применяется трубка 2 с сечением, перпендикулярным линиям тока (см. рис. 10.9). Жидкость в ней тормозится, ее кинетическая энергия переходит в потенциальную, и высота подъема жидкости служит мерой суммы: $p + \frac{1}{2} \rho v^2$. Вычитая из нее показания манометра 1, можно определить $\frac{1}{2} \rho v^2$.

По показаниям подобных манометров можно определить скорость течения и объем ежесекундно протекающей жидкости. На таких же идеях основаны различные приборы для измерения полной массы протекшей жидкости за некоторый промежуток времени (водомеры и газометры).

Уравнение Бернулли в форме (10.9) применимо к течению газа только в тех случаях, когда можно пренебречь изменением объема газа и возможными изменениями его внутренней энергии при сжатии и расширении.

Пусть, например, газ течет из широкого сосуда, где давление равно атмосферному, в более узкий, где статическое давление меньше на 1%. Скорость газа в первом сосуде примем очень малой. Какова она во втором сосуде?

Пренебрегая малым изменением плотности газа, получаем из уравнения Бернулли:

$$p_1 - p_2 = 0,01 p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \approx \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

При нормальной температуре (273 К) плотность воздуха $\rho \approx 1,3 \text{ кг/м}^3$. Поэтому скорость газа оказывается равной:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2} p_1}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}}{1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} \approx 40 \text{ м/с},$$

что подтверждается опытом. Итак, уравнение (10.9) приложимо и к газам, движущимся достаточно быстро.

Если продувать струю воздуха между двумя шариками или плоскими поверхностями, например открытками, подвешенными на нитях, то наблюдается их взаимное притяжение. Это объясняется тем, что давление между ними в соответствии с уравнением Бернулли падает. Такое же явление может возникнуть при движении больших судов в узком канале, где суда заметно уменьшают сечение потока жидкости, поэтому движение в каналах строго регулируется.

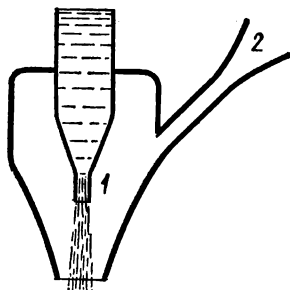


Рис. 10.10

Струя воды, вытекающая из узкого отверстия 1 (рис. 10.10), создает разрежение, что позволяет откачивать воздух из большого сосуда 2. Несмотря на исключительную простоту, подобный водоструйный насос может снижать давление до сотых долей атмосферного. Этот же принцип используется и в более совершенных насосах, рассматриваемых в молекулярной физике. На том же принципе работают пульверизатор (рис. 10.11) и автомобильный карбюратор.

При изучении течения жидкостей приходится считаться не только с их энергией, но и с их механическим импульсом. Пусть течение происходит по прямой горизонтальной трубе переменного сечения. Если давления в обеих частях равны соответственно p_1 и p_2 , то изменение импульса при переходе из участка сечением S_1 в участок сечением S_2 равно действующей силе, умноженной на время ее действия:

$$\rho_2 v_2 S_2 dt v_2 - \rho_1 v_1 S_1 dt v_1 = p_2 S_2 dt - p_1 S_1 dt.$$

Это уравнение после деления на общий элемент массы (см. вывод формулы 10.8) приводится к виду:

$$v + \frac{p}{\rho v} = \text{const.}$$

При $\rho = \text{const}$ можно написать и так:

$$\rho v + \frac{p}{v} = \text{const.}$$

Рассмотренное изменение импульса происходит за счет взаимодействия жидкости со стенками трубы, которая, в свою очередь, должна приобрести соответствующее изменение импульса противоположного знака. Этот эффект проявляется и при течении в трубе постоянного сечения, но изогну-

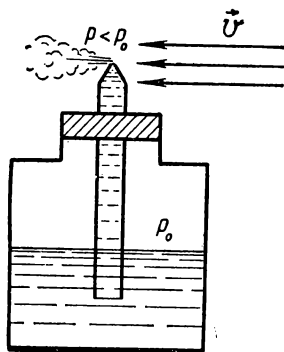


Рис. 10.11

той. Так, водопроводный кран (рис. 10.12), меняя направление импульса вытекающей струи, сам подвергается действию силы (\vec{F}_1 на рисунке 10.12).

На этом же принципе основано реактивное движение, с которым мы познакомились в главе 3 (движение турбин, самолетов и др.).

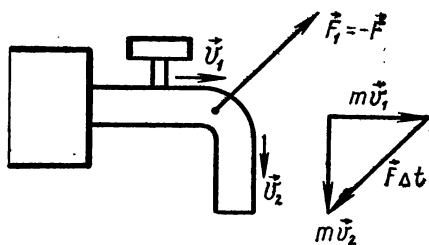


Рис. 10.12

10.4. ТРЕНИЕ В ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ

Трение, существующее в реальной жидкости, значительно усложняет строгое описание ее движения. В частности, при стационарном слоистом течении скорость течения в сечении трубы меняется от нуля (если жидкость смачивает стенки) у поверхности стенок до наибольшего значения (на оси трубы). Это легко показать на опыте. Трубу заполняют водой, затем сверху осторожно наливают подкрашенную воду и открывают кран K (рис. 10.13) так, чтобы течение было очень медленным. Вскоре вверху образуется окрашенный «язык», имеющий форму параболоида вращения.

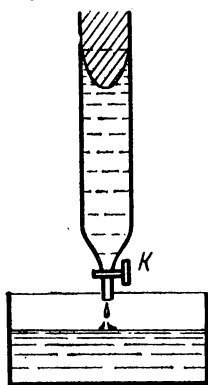


рис. 10.13

Это распределение скоростей является результатом существования трения между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями. Как показал И. Ньютон, сила трения между двумя слоями с поверхностями dS при относительной скорости $\frac{dv}{dx}$ и вязкости жидкости η равна:

$$\vec{f} = -\eta \frac{dv}{dx} dS \frac{\vec{v}}{v},$$

где x — координата, вдоль которой изменяется вектор \vec{v} (в трубе круглого сечения ось X направляют по радиусу трубы).

Пользуясь системой координат, изображенной на рисунке 10.14, вводим полярный радиус r произвольной точки внутри потока. Построим цилиндр с радиусами r и $r+dr$ и высотой h . Тогда для внутренней поверхности цилиндра можно записать, что сила трения, замедляющая движение жидкости на этой поверхности, равна:

$$f_1 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r h.$$

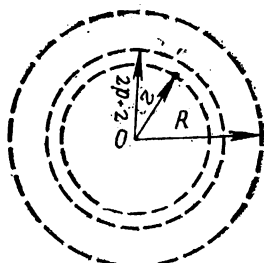


Рис. 10.14

Для внешней поверхности сила трения (она ускоряет движение) равна:

$$f_2 = -f_1 + df_1 = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r h + \eta 2\pi h d\left(r \frac{dv}{dr}\right).$$

Кроме того, за счет разности давлений на торцах цилиндра возникает ускоряющая сила, равная:

$$df_3 = (p_1 - p_2) 2\pi r dr.$$

При стационарном течении алгебраическая сумма этих трех сил обращается в нуль:

$$(p_1 - p_2) r dr + h \eta d\left(r \frac{dv}{dr}\right) = 0.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{1}{2} (p_1 - p_2) r^2 + \eta h r \frac{dv}{dr} = \text{const.}$$

Это выражение применимо ко всем участкам сечения. Но на оси трубы $r=0$, следовательно, и $\text{const}=0$. Поэтому получается:

$$-dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta h} r dr.$$

Интегрируя от произвольного r до стенки трубы ($r=R, v=0$), получаем:

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{p_1 - p_2}{h} (R^2 - r^2). \quad (10.11)$$

В этом выражении отсутствует полярный угол, следовательно, результат от него не зависит (сечение трубы — круг!), и профиль скоростей действительно представляет собой параболоид вращения.

Теперь можно найти объем жидкости, протекающей по трубе за некоторое время t . Построим на элементарной поверхности $2\pi r dr$ цилиндр высотой vt . Вся жидкость, заключенная в нем, протечет за время t через выбранное сечение. Суммирование по всему сечению трубы приводит к у р а в н е н и ю П у а з е й л я, определяющему объем протекшей жидкости (или массу, если результат интегрирования умножить на плотность жидкости):

$$V = \int_0^R vt \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{h} R^4 t. \quad (10.12)$$

Сильная зависимость от радиуса позволяет легко регулировать поток жидкости (например, водопроводным краном).

Так как поток стационарен, то разность давлений $p_1 - p_2$ требуется только для преодоления трения в жидкости.

Подчеркнем, что в случае идеальной жидкости ($\eta=0$) получилось бы выражение:

$$V_{ид} = \pi R^2 vt,$$

где скорость течения зависела бы от начальных условий.

10.5. ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

Когда течение жидкости теряет слоистый характер, применять уравнение Бернулли нельзя. Однако если ввести в рассмотрение среднюю скорость по сечению, то можно установить некоторые полезные закономерности. Как показывает опыт, при турбулентном течении профиль скоростей почти плоский (рис. 10.15), у стенок скорость резко падает до нуля.

Дж. Рейнольдс нашел, что при наличии трения характер течения жидкости зависит от соотношения между кинетической энергией единицы объема жидкости и потерями энергии на преодоление трения. Для оценки этого соотношения он ввел число, носящее ныне его имя.

Число Рейнольдса можно получить следующим наглядным образом. Выделим мысленно в жидкости шар радиусом R , движущийся со скоростью v . Пусть плотность жидкости ρ . Кинетическая энергия W_k этого шара пропорциональна величине $\rho R^3 v^2$. Считая трение подчиняющимся закону Стокса (см. § 3.4), оценим работу A против сил трения на пути, равном диаметру шара. Она оказывается пропорциональной произведению $\eta R^2 v$. Отношение этих величин и дает число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho v R}{\eta} \sim \frac{W_k}{A}. \quad (10.13)$$

Можно показать, что при малых значениях Re (малая скорость течения или большая вязкость) течение должно быть слоистым. Но при очень больших числах Рейнольдса, т. е. при больших скоростях или малой вязкости, когда линии тока слабо взаимодействуют друг с другом, снова должно возникнуть слоистое течение. При промежуточных значениях Re течение становится турбулентным.

Эти же соображения можно применять и при исследовании движения некоторого тела в жидкости. При этом систему координат часто связывают с телом; тогда под v понимается скорость набегающего потока жидкости на тело, а под R — характерный размер тела (во многих случаях это — наибольший поперечный размер, перпендикулярный скорости невозмущенного потока). Например, для шара радиусом R , движущегося в потоке неограниченного сечения, течение получается слоистым при $Re < 300$, а также при $Re > 10^4$.

При промежуточных значениях Re течение становится турбулентным.

При слоистом течении сопротивление движению пропорционально первой степени скорости (закон Стокса). При турбулентном движении оно возрастает и движущееся тело передает жидкости большую

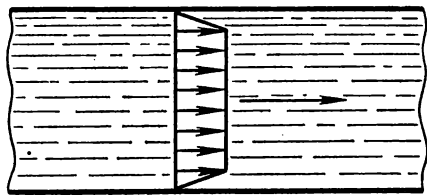


Рис. 10.15

долю кинетической энергии. Грубую оценку возрастания сопротивления можно провести на следующем примере. Пусть плоская пластина площадью S движется со скоростью \vec{v} , нормальной к поверхности пластины. Тогда $Svdt$ есть элементарный объем жидкости, отталкиваемый пластиной за время dt . Умножив это произведение на плотность жидкости ρ , получим отталкиваемую элементарную массу. Если она приобретает при этом скорость v , то передаваемый жидкости импульс равен:

$$dp = \rho S v^2 dt.$$

Тогда сила сопротивления, действующая на пластину, равна:

$$f_1 = \frac{dp}{dt} = \rho S v^2.$$

Сопротивление оказывается пропорциональным квадрату скорости. Действительная сила сопротивления оказывается равной:

$$f = C_x \rho S v^2, \quad (10.14)$$

где C_x — коэффициент, существенно зависящий от формы тела, S — наибольшее поперечное сечение тела, перпендикулярное невозмущенному потоку.

Иногда выражение (10.14) считают общим для всех скоростей и C_x рассматривают как функцию скорости. Зависимость силы сопротивления от числа Рейнольдса для шара графически представлена на рисунке 10.16, причем на участке I $C_x \sim \frac{1}{v}$, на участке II $C_x = \text{const}$, на участке III $C_x \sim v$. Участки разделены переходными областями, где C_x сложно зависит от скорости.

Все сказанное оправдывается и для тел иной формы. Однако следует подчеркнуть, что эти рассуждения верны лишь для скоростей, меньших скорости звука $v_{зв}$, которая в воздухе приблизительно равна 330 м/с. При звуковых и сверхзвуковых скоростях возникают качественно новые явления; они будут рассмотрены в газодинамике, после изучения основ молекулярной физики и термодинамики.

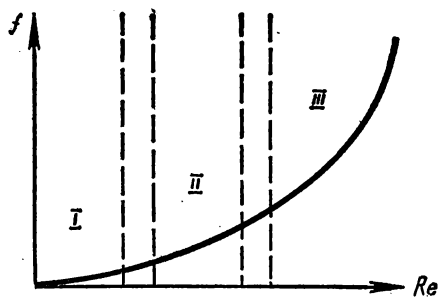


Рис. 10.16

10.6. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ И ГАЗЕ. ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ

Сила взаимодействия потока жидкости или газа с движущимся телом может быть направлена, в зависимости от формы тела, различным образом. Но во всех случаях ее можно представить в виде

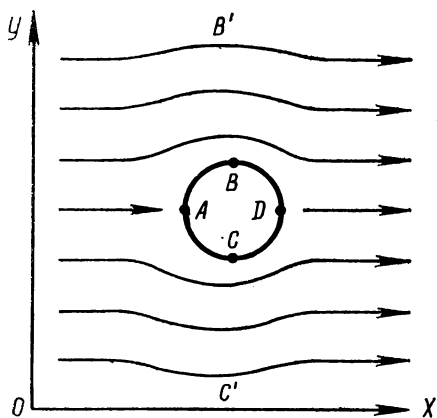


Рис. 10.17

суммы двух сил: первая (с коэффициентом C_x), называемая *лобовым сопротивлением*, направлена параллельно скорости невозмущенного потока; вторая (с коэффициентом C_y) перпендикулярна первой; ее называют «*подъемной*» силой, хотя она может (при горизонтальном движении) быть направленной вверх, вниз или горизонтально (но всегда перпендикулярно скорости потока).

Разрабатывая гидродинамику, Л. Эйлер пришел к парадоксальному выводу: идеальные жидкость или газ, лишенные тре-

ния, должны свободно обтекать тело, не обмениваясь с ним энергией. При симметричной форме и обтекание было бы симметричным. При этом лобовое сопротивление отсутствует (рис. 10.17). В реальных условиях из-за трения в газе происходит некоторое перераспределение линий тока, обтекание становится несимметричным и это приводит к появлению «аэродинамических» сил.

Вернемся к рисунку 10.17. На достаточном расстоянии от шара поток остается невозмущенным, частицы движутся с прежней скоростью v . Если считать, что за пределами участка $B'C'$ поток остался невозмущенным, то показанную на рисунке часть потока можно считать макроскопической трубкой тока и применять к ней уравнение Бернулли (хотя бы для качественных оценок).

Так как шар уменьшает свободное сечение трубки тока, то вблизи шара скорость потока должна измениться: при подходе к сечению $B'C'$ она должна расти; при удалении от него — снова убывать, стремясь к невозмущенному значению. В областях A и D поток затормаживается. Следовательно, будет меняться и давление в этих частях потока.

В покоящейся жидкости давление на все участки поверхности шара было бы одинаково. Постоянно оно и в невозмущенном потоке. На рисунке 10.18 области избыточного давления (по сравнению с давлением в невозмущенном потоке) показаны стрелками, направленными к центру шара. Области недостаточного давления (в областях повышенной скорости) показаны стрелками, направленными от центра шара. При идеализированном симметричном обтекании (без трения) суммарная сила, испытываемая шаром, обращается в нуль.

Если форма тела несимметрична, то, как видно из рисунка 10.19, в результате перераспределения давления лобовое сопротивление снова отсутствует, но возникает сила, направленная перпендикулярно невозмущенному потоку, — подъемная сила. Следует подчеркнуть, что в идеальной жидкости лобовое сопротивление будет отсут-

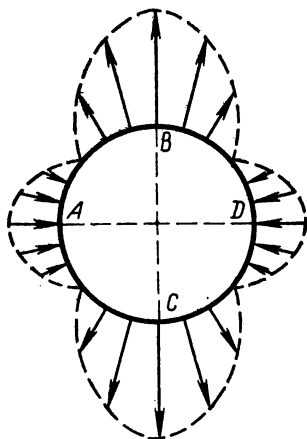


Рис. 10.18

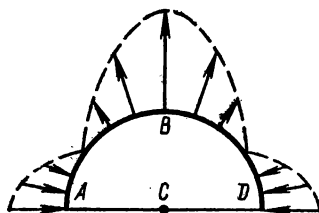


Рис. 10.19

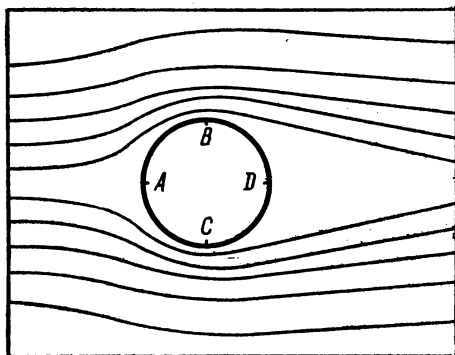


Рис. 10.20

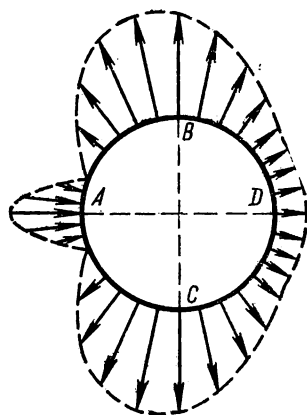


Рис. 10.21

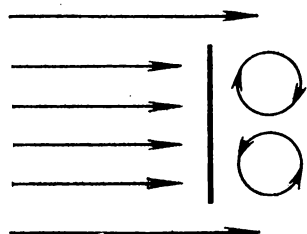
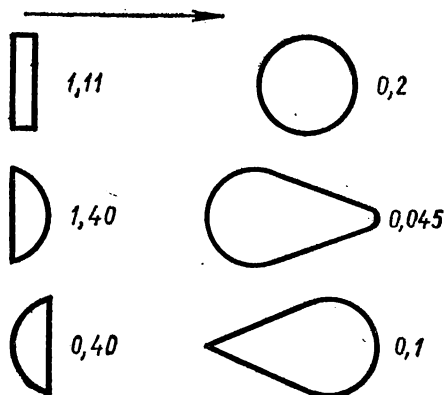


Рис. 10.22



$Re \approx 10^6$
Рис. 10.23

ствовать и при произвольной форме тела, так как без сил трения невозможен энергетический обмен между жидкостью и телом. В реальной жидкости (или газе) существование трения приводит к иным изменениям течения. На рисунках 10.20 и 10.21 дана картина слоистого обтекания тела. Из этих рисунков выясняется основной результат: несимметрия обтекания, обусловленная трением, вызывает появление лобового сопротивления и оказывает влияние на подъемную силу.

Точные расчеты коэффициентов C_x и C_y весьма сложны даже при слоистом обтекании. Еще более сложны явления при больших числах Рейнольдса, когда течение теряет слоистый характер. Мы отметим лишь самые важные особенности возникающих взаимодействий:

а) образуются завихрения, уносящие импульс и кинетическую энергию, увеличивается лобовое сопротивление;

б) изменяется и подъемная сила, причем здесь явления еще более сложны: она может, как мы увидим, и возрасти.

Существенную роль играет следующий фактор: заметные возмущения течения происходят обычно в слое жидкости, прилегающем к поверхности движущегося тела, причем толщина этого слоя равна:

$$\delta = \frac{l_x}{\sqrt{Re}},$$

где l_x — продольный размер тела. При больших числах Рейнольдса этот слой тонок.

Пусть шар радиусом $R=1$ м движется в воде ($\eta=10^{-3}$ Па·с, $\rho=10^3$ кг/м³) с малой скоростью $v=10^{-2}$ м/с. Для этого случая получается:

$$Re = 10^4; \delta = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

т. е. возмущение захватывает довольно толстый слой жидкости. Но при движении шара в воздухе ($\eta=2 \cdot 10^{-5}$ Па·с), имеющем плотность 1,3 кг/м³, при большей скорости ($v=30$ м/с) получается:

$$Re = 2 \cdot 10^6 \text{ и } \delta = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Почти вся практическая аэродинамика имеет дело именно с такими случаями малой толщины слоя; его называют пограничным слоем. За его пределами влияние вязкости почти не сказывается, и изменение характера течения можно описывать, пользуясь уравнением Бернулли (без учета вязкости).

Значительная разность давлений на участках AB и AC и в области вблизи точки D (см. рис. 10.20), куда линии тока почти не проникают, так что там создается почти невозмущенное давление, может привести к качественно новому явлению — образованию завихрений. При симметричной форме тела вихри будут в среднем одинаково часто срываться сверху и снизу с обоих краев тела (рис. 10.22) и суммарный момент механического импульса, уносимый ими, будет

равен нулю, как и должно быть по закону сохранения момента импульса. Но вихри уносят энергию, поэтому сопротивление движению должно возрастать.

Конечно, условия обтекания и вихреобразования существенно зависят от формы тел. Поэтому лобовые сопротивления тел одинакового сечения, но разной формы сильно отличаются друг от друга (см. рис. 10.23, где около каждого тела указан его коэффициент C_x . При этом предполагается, что поток набегает на тело в направлении стрелки).

Если симметрия течения отсутствует, то может случиться, что условия образования вихрей одного знака станут лучше и число их относительно возрастает. Тогда уносимый момент механического импульса будет отличен от нуля. Но закон сохранения должен выполняться. Поэтому в таком случае должны возникнуть (и действительно возникают) вихри противоположного знака вокруг самого тела. Это приводит к дополнительному перераспределению давления вокруг тела.

Впервые на это обстоятельство указал и детально его изучил Н. Е. Жуковский (1847—1941).

Обратимся сначала к опыту, где такой вихрь создается искусственно. Пусть легкий бумажный цилиндр скатывается с наклонной плоскости (рис. 10.24). Благодаря трению он захватывает прилежащие слои воздуха и сообщает им момент импульса — воздух вращается вместе с цилиндром. Поэтому скорость обтекания с одной стороны цилиндра (для рис. 10.24, справа) оказывается меньше, чем с другой; в результате возникает поперечная (относительно потока воздуха) сила, направленная влево и складываемая с силой тяжести цилиндра.

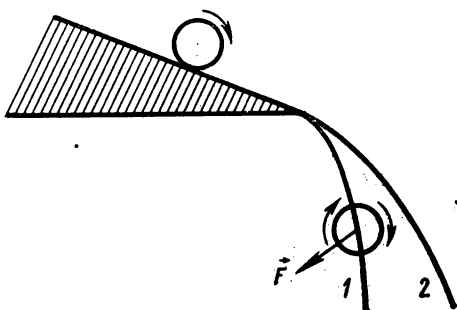


Рис. 10.24

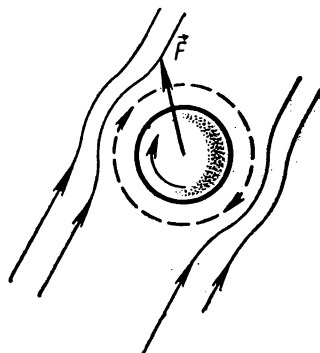


Рис. 10.25

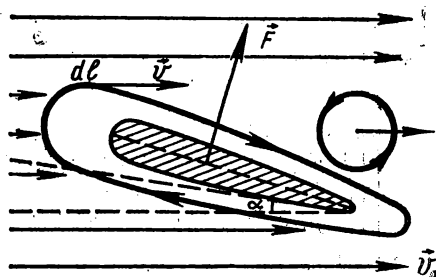


Рис. 10.26

Вследствие этого цилиндр, падая, опишет траекторию 1, более крутую, чем обычная траектория 2 (последнюю можно получить, скатывая тяжелый цилиндр, например деревянный, для которого аэродинамическая сила мала по сравнению с силой тяжести).

Тот же эффект позволяет поддерживать в струе воды или воздуха легкий шарик (например, для настольного тенниса), если удастся сообщить ему вращение в нужном направлении (рис. 10.25). Этот эффект, называемый эффектом Магнуса, пытались использовать в крупномасштабных устройствах, но практического применения он не получил.

У Жуковского возникла следующая идея: если обеспечить отрыв от тела вихрей одного знака, уносимых потоком, то вокруг него должен будет образоваться устойчивый вихрь противоположного знака (рис. 10.26). Тогда давление под телом окажется больше, чем над ним, и появится дополнительная аэродинамическая сила, имеющая достаточно большую подъемную составляющую.

Жуковским был разработан специальный профиль самолетного крыла, обеспечивающий подъемную силу, значительно превосходящую ту силу, которая создается без образования вихрей.

По Жуковскому, подъемная сила, получаемая при образовании вихря, пропорциональна скорости невозмущенного потока v_0 и так называемой циркуляции скорости Γ , определяемой следующим образом:

$$\Gamma = \oint \vec{v}_0 \cdot d\vec{l} \sim \lambda v_0 \alpha \quad (10.15)$$

(здесь λ — длина хорды сечения крыла, α — угол атаки, т. е. угол между касательной к профилю и направлением скорости \vec{v}_0). К сожалению, увеличение подъемной силы сопровождается и увеличением лобового сопротивления. Обе эти силы пропорциональны квадрату скорости; следовательно, мощность, необходимая для полета в этих условиях, растет, как третья степень скорости. Но увеличение необходимой мощности влечет за собой увеличение веса двигателя, так что получить большую полезную нагрузку при больших скоростях полета очень трудно.

Кроме того, так как вихреобразование начинается лишь при достаточно большой скорости, а самолет должен иметь ее при взлете и при посадке, длина взлетной полосы получается значительной, что экономически невыгодно.

Вертолеты, т. е. аппараты с дополнительным горизонтальным винтом, могут садиться при практически нулевой горизонтальной скорости, могут «висеть» в воздухе над определенной точкой земной поверхности. Но при полете их скорость невелика, так что вертолеты не могут заменить обычных самолетов, но лишь успешно дополняют их.

При горизонтальном полете самолета с постоянной скоростью динамика весьма несложна: сила тяги винта, возникающая при

отбрасывании им воздуха, уравнивает силу лобового сопротивления; подъемная сила уравнивает силу тяжести, действующую на самолет.

Изменяя ориентацию рулей и закрылков (небольших подвижных участков на краях крыльев), летчик может изменять в полете соотношение действующих сил и регулировать режим полета.

Самолеты летают, «опираясь» на воздух. Ракеты, где движение возникает за счет эффекта отдачи, не нуждаются в воздухе как опоре, а потому могут летать на очень больших высотах и даже в космосе. Но аэродинамика при больших (сверхзвуковых) скоростях существенно отличается от рассмотренных здесь процессов. Для ее понимания необходимо знание термодинамики. Поэтому особенности движения со сверхзвуковой скоростью будут рассмотрены в молекулярной физике.

**11.1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ.
ВЕЩЕСТВО И ПОЛЕ**

Взаимодействия, весьма многообразные по своим проявлениям, как уже отмечалось в § 2.4, сводятся к четырем основным (фундаментальным) типам сил:

- 1) сила всемирного тяготения, открытая Ньютоном;
- 2) электромагнитные силы: сила Кулона, действующая между электрическими зарядами; сила Ампера, действующая между токами; сила Эрстеда, действующая между магнитами и токами. Все эти силы были обобщены в электродинамике (сила Лоренца);
- 3) ядерные силы и 4) слабые взаимодействия, действующие между элементарными частицами в микромире. Эти силы изучены еще недостаточно; они встретятся нам только в ядерной физике.

В механике мы уже сталкивались с силами упругости, обеспечивающими сохранение объема и формы твердых тел и сохранение объема жидкости, а также с силами трения. Эти силы, действующие между молекулами и атомами тел, имеют электромагнитную природу.

В этой главе мы подробно изучим одно из основных взаимодействий — всемирное тяготение (гравитацию).

Для механики Ньютона характерно взаимодействие тел, удаленных друг от друга. Например, Земля притягивается к Солнцу и, в свою очередь, притягивает его к себе. Как же передается сила тяготения?

И. Ньютон, установивший количественную характеристику тяготения, но не знавший его причин, именно при обсуждении этого вопроса написал замечательные слова: «Гипотез я не измышляю», подчеркивая этим нежелание делать высказывания, не опирающиеся на факты или идеи, уже подтвержденные фактами.

Но он же высказал и другую глубокую мысль: «Предполагать... что тело может действовать на другое на любом расстоянии в пустом пространстве, без посредства чего-либо передавая действие и силу, — это, по-моему, такой абсурд, который немислим ни для кого, умеющего достаточно разбираться в философских предметах».

В настоящее время физика считает, что взаимодействие между частицами вещества передается при помощи поля — особой формы

материи, отличной от вещества и существующей наряду и одновременно с ним. При этом обе формы материи совершенно равноправны: в конце курса мы увидим, что при определенных условиях они могут даже испытывать взаимные превращения.

Хотя часто говорят, что тело (вещество) «создает» поле тяготения (или электрический заряд «создает» электромагнитное поле), но этот способ выражения недостаточно точен: поле существует вместе с веществом. Более того, в электродинамике мы узнаем, что электромагнитное поле, возникающее при изменении электромагнитного состояния вещества, может затем существовать совершенно самостоятельно.

Сейчас установилась точка зрения, что все взаимодействия между телами в природе осуществляются благодаря полям. Именно посредством соответствующих полей осуществляется гравитационное притяжение всех тел, притяжение или отталкивание электрических зарядов, взаимодействие токов и т. п. Взаимодействие в меняющемся во времени электромагнитном поле успешно описывают, вводя понятие о «частицах» поля — фотонах, имеющих массу покоя, равную нулю; этим фотоны отличаются от частиц вещества. Но фотоны обладают импульсом и энергией и могут взаимодействовать с веществом. Само взаимодействие тел представляется как обмен квантами — «частицами» поля. При описании ядерных взаимодействий подобно этому вводят понятие о мезонах — своеобразных «частицах» ядерного поля. Подробнее об этом речь будет идти в ядерной физике. Сейчас отметим лишь, что имеются попытки связать взаимодействие вещества и меняющегося во времени поля тяготения с особыми «частицами» — квантами гравитационного поля — гравитонами. Однако полной экспериментально подтвержденной теории гравитации в настоящее время нет. Нет также и достаточно ясных представлений о взаимодействиях в постоянных (не меняющихся во времени) полях различной природы. Несмотря на существенное развитие наших представлений о природе гравитации (об этом будет еще говориться в конце главы), вопрос о способе передачи тяготения сейчас является открытым. Уместно, следуя Ньютону, «не измышлять гипотез» о том, почему тела притягиваются, а обсуждать, как они притягиваются. Поэтому в настоящей главе сначала будет рассмотрена теория тяготения Ньютона, сформулированная на языке сил тяготения, действующих между частицами вещества, а затем будут развиты представления о поле тяготения и его основных свойствах.

11.2. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА.

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

С давних пор люди задумывались над вопросом о строении окружающего мира. К. Птолемей (70—147) одним из первых создал более или менее законченную картину мира. Он считал Землю центром мироздания: все небесные тела двигались вокруг Земли по

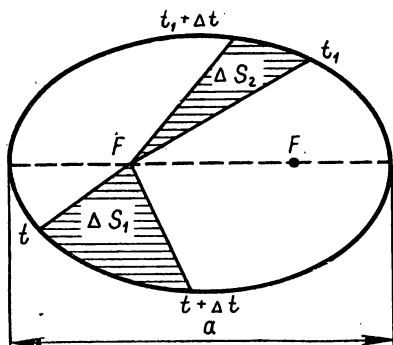


Рис. 11.1

окружностям¹. Когда выяснилось, что планеты движутся более сложным образом, то было сделано предположение, что они участвуют в нескольких круговых движениях.

По мере уточнения астрономических наблюдений устанавливались все большие отклонения от теории Птолемея. Но только в XVI в. Н. Коперник показал, что описание движения небесных тел упрощается, если систему координат связать с центром Солнца. Еще через пол-

века И. Кеплер, обрабатывая более точные наблюдения Т. Браге (1546—1601), а также свои собственные, нашел три кинематических закона движения планет:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор, связанный с планетой, описывает в равные промежутки времени Δt равные площади ΔS (рис. 11.1).
3. Кубы больших полуосей эллипсов пропорциональны квадратам времен обращения планет.

В 1687 г. Ньютон опубликовал закон всемирного тяготения, объясняющий физический смысл законов Кеплера и обобщающий их. Мы проследим за ходом мысли Ньютона, упростив математическую сторону дела. Вместо эллиптического движения рассмотрим движение по круговым орбитам, что вполне допустимо, так как эллиптичность большинства планетных орбит очень незначительна. При этом формулировка законов Кеплера упростится: Солнце окажется в центре круговой траектории. Смысл второго закона Кеплера сведется к утверждению постоянства угловой скорости обращения планеты, третий закон даст:

$$R_i^3 = C_c T_i^2,$$

где R_i — радиус орбиты, T_i — период обращения планеты, C_c — константа для всех планет Солнечной системы.

Ньютон при определении центростремительного ускорения планет применяет второй и третий законы Кеплера:

$$a_i = \frac{4\pi^2}{T_i^2} R_i = \frac{4\pi C_c'}{R_i^2} = \frac{C_c}{R_i^2}.$$

¹ В настоящее время мы знаем, что философская идея Птолемея о Земле — центре мироздания — была совершенно ошибочна. Кинематическое же описание движения небесных тел в системе координат, связанной с Землей, вполне допустимо, и им до сих пор широко пользуются на практике.

В это время уже изучено движение спутников Юпитера. Для них Ньютон получает:

$$a_i = \frac{C_{\text{Ю}}}{R_i^2},$$

где $C_{\text{Ю}}$ — уже другая постоянная, меньшая, чем $C_{\text{С}}$. Наконец, для движения Луны вокруг Земли получается:

$$a_i = \frac{C_3}{R_i^2},$$

где C_3 — еще одна постоянная, меньшая, чем две первые.

Ньютон делает гениальное предположение, что каждая из постоянных зависит только от массы притягивающего тела:

$$C_{\text{С}} = G M_{\text{С}}; C_{\text{Ю}} = G M_{\text{Ю}}; C_3 = G M_3,$$

где G — общий для всех случаев коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц, а $M_{\text{С}}$, $M_{\text{Ю}}$, M_3 — соответственно масса Солнца, Юпитера, Земли.

Применяя теперь свой второй закон, Ньютон находит, что во всех случаях движение вызывается центральной силой (направленной всегда к притягивающему телу):

$$F = G \frac{Mm}{R^2},$$

где M и m — соответственно масса притягивающего и притягиваемого тела, R — расстояние между центрами тяжести тел, принимаемых за точки (что допустимо при громадном относительном удалении).

Если условиться, что радиус-вектор направлен из центра притягивающего тела, то закон всемирного тяготения Ньютона принимает вид:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{R^3} \vec{R}. \quad (11.1)$$

Ньютон показал (ниже мы даем современное доказательство), что однородный шар создает во внешнем пространстве такую же силу, как материальная точка с массой, равной массе шара, расположенная в центре последнего. Считая Землю однородным шаром, он сравнил ускорение свободного падения g у поверхности Земли с ускорением $a_{\text{Л}}$ Луны, известным из астрономических наблюдений. Оказалось, что $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $a_{\text{Л}} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$, т. е.

$$\frac{g}{a_{\text{Л}}} = 3600 = \left(\frac{R_{\text{Л}}}{R_3} \right)^2,$$

как и должно быть, так как расстояние от Земли до Луны $R_{\text{Л}}$ составляет 60 земных радиусов R_3 .

Следует отметить, что Ньютон не знал ни одного числового значения масс небесных тел, как и постоянной G .

11.3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. ПОСТОЯННАЯ ТЯГОТЕНИЯ

Изучая неправильности в движении наиболее удаленной из известных в то время планет — Урана, Адамс и Леверье независимо друг от друга и практически одновременно (в 1846 г.) нашли, что эти неправильности могут быть объяснены, если их приписать влиянию еще более далекой планеты; положение последней на небесном своде было ими предсказано на основании закона всемирного тяготения. Астрономы, действительно, обнаружили новую планету в указанном месте. Позже она была названа Нептуном. В 1930 г. таким же образом был предсказан и обнаружен Плутон — еще более далекая планета Солнечной системы.

Решая общую задачу движения под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, Ньютон показал, что возможны не только круговые и эллиптические, но и гиперболические (они наблюдаются у многих комет) и параболические траектории.

Действием силы тяготения со стороны Луны Ньютон объяснил возникновение приливов и отливов и казавшееся в то время совершенно непонятым появление их дважды в сутки (а не один раз).

Допустим для простоты, что Земля покрыта равномерным слоем воды (рис. 11.2). Ускорение, сообщаемое Луной, в точках A , B , C различно:

$$a_A > a_B > a_C.$$

Поэтому твердый земной шар с центром в точке B получит некоторое среднее ускорение: слой воды вблизи точки A — несколько большее, а слой воды вблизи точки C — несколько меньшее. Слои воды вблизи точки A будут несколько опережать земной шар, а близкие к точке C — отставать от него. Поэтому на линии, соединяющей центры Земли и Луны, образуются два водяных выступа (приливы), движущиеся вокруг Земли по мере ее вращения вокруг собственной

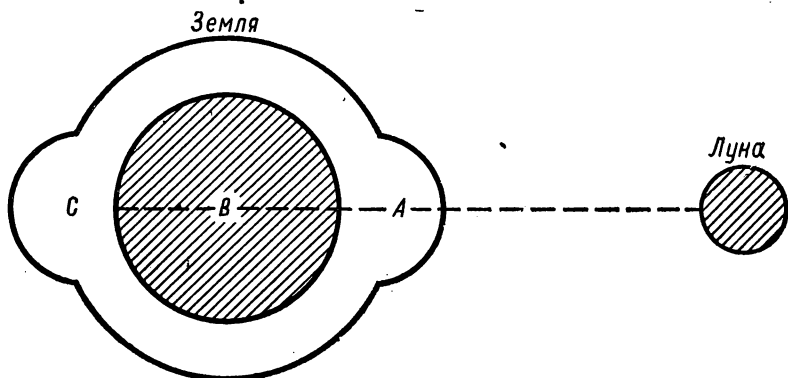


Рис. 11.2

оси (перемещения Луны мы для простоты не учитываем). В то же время на концах диаметра, перпендикулярного линии AC , уровень воды понизится (отливы). Очевидно, в каждой точке земного шара приливы должны происходить дважды в сутки (когда эта точка пересекает линию AC). Со-

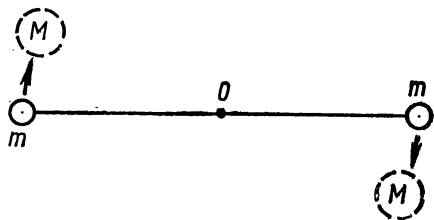


Рис. 11.3

ответственно два раза в сутки должны происходить и отливы. Так как Луна перемещается, Земля не вся покрыта водой, существуют силы трения, силы Кориолиса и тяготение со стороны Солнца, то истинная картина приливов и отливов оказывается гораздо сложнее. В частности, утверждение, что наибольшие приливы будут наблюдаться вдоль линии AC , оказывается неточным. Но принцип объяснения приливов остается в силе.

В формулу (11.1) входит коэффициент пропорциональности G . Так как единицы силы, массы и расстояния уже установлены, то нельзя произвольно распоряжаться этим коэффициентом — он должен быть определен из опыта. Это удалось сделать Кавендишу в 1795 г. при помощи крутильных весов. Его весы состояли из небольшой гантели (стержень с небольшими шариками массой m на концах), подвешенной на длинной упругой и тонкой нити, заметно закручивающейся уже под действием весьма малых сил. След нити, расположенной перпендикулярно чертежу, обозначен на рисунке 11.3 буквой O . К гантели одновременно приближали два больших свинцовых шара (их масса M достигала 150 кг); ось вращения шаров составляла продолжение нити подвеса. Под действием силы тяготения гантель поворачивалась, нить подвеса закручивалась. Измеряя угол закручивания, можно было рассчитать вращающий момент, испытываемый гантелью, и силу взаимодействия между ней и большими шарами. Зная массы взаимодействующих шаров и расстояние между их центрами, можно было вычислить постоянную тяготения G . По современным уточненным данным,

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}. \quad (11.2)$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли равно:

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2} \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

поэтому, зная G и R_3 и считая Землю однородным шаром, можно найти ее массу. Получается:

$$M_3 \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Отсюда средняя плотность Земли $\rho = 5500 \text{ кг/м}^3$; это значение более чем вдвое превосходит среднюю плотность поверхностных слоев

Земли, что позволяет предполагать наличие внутри Земли плотного ядра.

По известным ускорениям планет определяют массу Солнца:

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} \approx 0,3 \cdot 10^6 M_{\oplus}.$$

Изучение неправильностей в движении планет и спутников дает возможность оценить массы других небесных тел.

Строго говоря, Солнце и планеты обращаются вокруг общего центра масс. Но так как масса Солнца много больше массы любой планеты, то центр масс системы лежит почти в центре масс Солнца, поэтому при наших рассуждениях мы и могли считать его неподвижным.

В настоящее время справедливость закона тяготения проверена вплоть до самых больших доступных астрономам расстояний. Замечательно, что силы тяготения не зависят от промежуточной среды (от действия силы тяготения нельзя избавиться) и от природы тяготеющих тел. Опытным путем доказано, что тяготение испытывают незаряженные элементарные частицы (опыты производились с пучком нейтронов) и частицы света — фотоны. Обнаружить на опыте тяготение заряженных частиц трудно, так как другие взаимодействия у них значительно сильнее, чем тяготение. Однако нет сомнений, что закон тяготения распространяется и на заряженные элементарные частицы.

11.4. ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ. НАПРЯЖЕННОСТЬ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА

Перейдем к изучению элементов теории поля тяготения (гравитационного поля). По современным представлениям вокруг любого тела существует поле тяготения — особая форма материи. В рамках классической физики оно существует независимо от присутствия других тел, проявляя себя в силовом действии на эти тела. Это утверждение базируется на неоднократно использовавшемся в динамике принципе суперпозиции.

Гравитационные поля нескольких материальных тел обладают тем свойством, что их взаимодействие с любым иным телом определяется геометрической суммой сил, создаваемых каждым полем. Поле тяготения распределено в пространстве непрерывно.

Если в произвольную точку пространства поместить «пробное тело» — материальную точку массой m , не искажающую заметно существующего поля, — и измерить силу \vec{F} , испытываемую этим пробным телом, то рассматриваемую точку поля можно охарактеризовать векторной величиной — *напряженностью* поля $\vec{\Gamma}$, определяемой уравнением:

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (11.3)$$

Следовательно, напряженность характеризует силу, испытываемую единичной массой в данной точке поля.

Напряженность поля, создаваемого точечной массой M на расстоянии R от нее, равна:

$$\vec{G} = -G \frac{M}{R^3} \vec{R}. \quad (11.4)$$

В поле можно провести кривую, касательная к которой в каждой точке параллельна направлению вектора напряженности в данной точке; такая кривая называется линией напряженности. Для

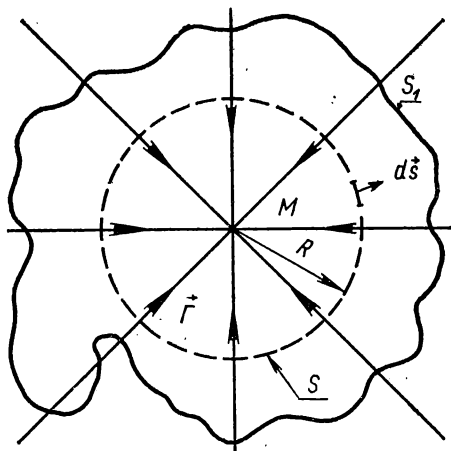


Рис. 11.4

поля, созданного точечной массой, линии напряженности представляют собой радиусы, проведенные из этой точки. По определению, направление линий напряженности считается совпадающим с направлением вектора напряженности. Все линии напряженности тяготения начинаются в бесконечности и кончаются в точках, создающих поле.

Условимся проводить через каждый элемент поверхности, нормальный к вектору напряженности, число линий, пропорциональное ее значению. Тогда получится удобный графический способ представления поля: оно тем сильнее, чем гуще располагаются линии напряженности.

Очевидно, что если силы подчиняются принципу суперпозиции, то это относится и к напряженностям: напряженность поля нескольких источников находится векторным суммированием напряженностей в каждой точке поля:

$$\vec{G} = \Sigma \vec{G}_i. \quad (11.5)$$

Скалярная величина $dN = \vec{G} \cdot d\vec{S}$ называется *поток вектора напряженности* через элемент площади, характеризуемый вектором $d\vec{S}$, нормальным к элементу, причем длина нормали численно равна площади. Выбор положительного направления вектора $d\vec{S}$ произволен. Если же в поле выделяется объем, охваченный некоторой замкнутой поверхностью, то за положительное направление $d\vec{S}$ принимается направление внешней нормали. Поток считают положительным, когда линии напряженности «выходят» наружу из выделенного объема, ограниченного рассматриваемой поверхностью.

Окружим точечную массу M шаровой поверхностью S радиусом R

с центром в точке M (рис. 11.4). Поток вектора напряженности в этом случае равен:

$$N = \int \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -G \frac{M}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi GM, \quad (11.6)$$

так как векторы $\vec{\Gamma}$ и $d\vec{S}$ везде противоположены друг другу. Таким образом, поток вектора напряженности через замкнутую поверхность определяет число линий напряженности, пронизывающих эту поверхность.

Построим теперь произвольную замкнутую поверхность S_1 , охватывающую точку M и ранее построенную шаровую поверхность S (см. рис. 11.4). Из рисунка видно, что поток через обе поверхности одинаков, так как все линии, пронизывающие поверхность S_1 , пройдут и через поверхность S . Если какая-либо линия пересекает поверхность S_1 несколько раз, то обязательно нечетное число раз, так что положительное и отрицательное слагаемые будут попарно уничтожаться и в сумме (11.6) каждая линия напряженности будет встречаться лишь один раз.

Если внутри поверхности имеется несколько масс, то создаваемые ими напряженности в каждой точке суммируются векторно, а потоки через поверхности — скалярно. Массы, расположенные вне замкнутой поверхности, дадут через нее нулевой поток; однако они создадут в каждой точке внутри поверхности некоторую напряженность поля. Все указанные свойства потока объединяются в одной из важнейших теорем поля, принадлежащей Остроградскому и Гауссу. Эта теорема гласит: «Если в поле, создаваемом многими источниками M_i , выделить произвольную замкнутую поверхность S , то поток вектора напряженности через эту поверхность равен:

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum M_{i_{\text{вн}}}, \quad (11.7)$$

где в сумму входят только источники, расположенные внутри поверхности».

Эта теорема позволяет легко находить напряженность поля при симметричном расположении материальных тел. Так, однородный шар или шаровой слой массой M создает во внешнем пространстве такое же поле, как точечная масса, помещенная в центре шара или шарового слоя. Это легко получить, исходя из симметрии распределения поля.

Найдем напряженность поля в полости, охваченной шаровым слоем с радиусами R_1 и R_0 , например в точке A (рис. 11.5). На сфере радиусом ρ , проходящей через точку A , напряженность $\vec{\Gamma}_1$ поля должна быть везде одинакова по модулю. Применяя к этой сфере теорему Остроградского — Гаусса, получаем:

$$N = \int_S \vec{\Gamma}_1 \cdot d\vec{S} = 0,$$

так как сфера не охватывает никаких масс. Но все слагаемые под знаком интеграла имеют один и тот же знак (в силу симметрии). Поэтому должно быть:

$$\vec{\Gamma}_1 = 0. \quad (11.8)$$

Итак, шаровой слой не создает поля в области, внутренней по отношению к нему.

Найдем напряженность поля внутри однородного шара массой M и радиусом R_0 . Выбрав внутри шара произвольную точку, отстоящую от центра на расстоянии ρ , проведем через эту точку шаровую поверхность. Применяя к ней теорему Остроградского — Гаусса, получим:

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_1,$$

где M_1 — масса, охваченная сферой радиусом ρ . Но так как

$$\frac{M_1}{M} = \frac{\rho^3}{R_0^3},$$

а модуль напряженности во всех точках поверхности одинаков (из-за симметрии задачи), то

$$\int_S dS = 4\pi\rho^2 \text{ и}$$

$$4\pi\rho^2\Gamma = -4\pi G M_1.$$

Напряженность поля внутри однородного шара оказывается равной

$$\vec{\Gamma} = -G \frac{M_1}{\rho^3} \vec{\rho} = -G \frac{M}{R_0^3} \vec{\rho}. \quad (11.9)$$

При $\rho = R_0$ получаем, как и следовало ожидать:

$$\vec{\Gamma} = -G \frac{M}{R_0^3} \vec{R}_0.$$

Распределение полей в рассмотренных случаях изображено на рисунке 11.6.

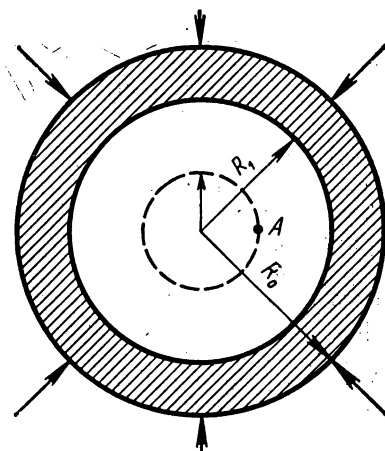


Рис. 11.5

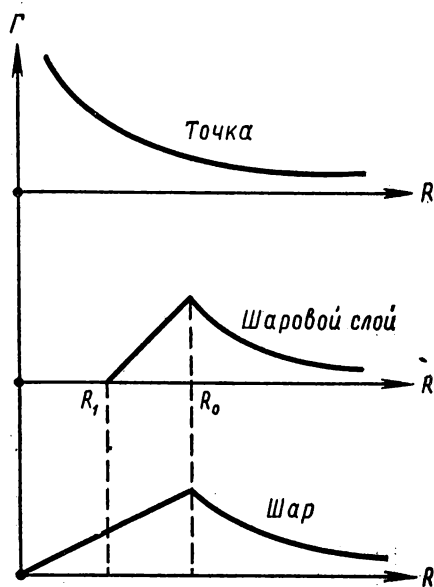


Рис. 11.6

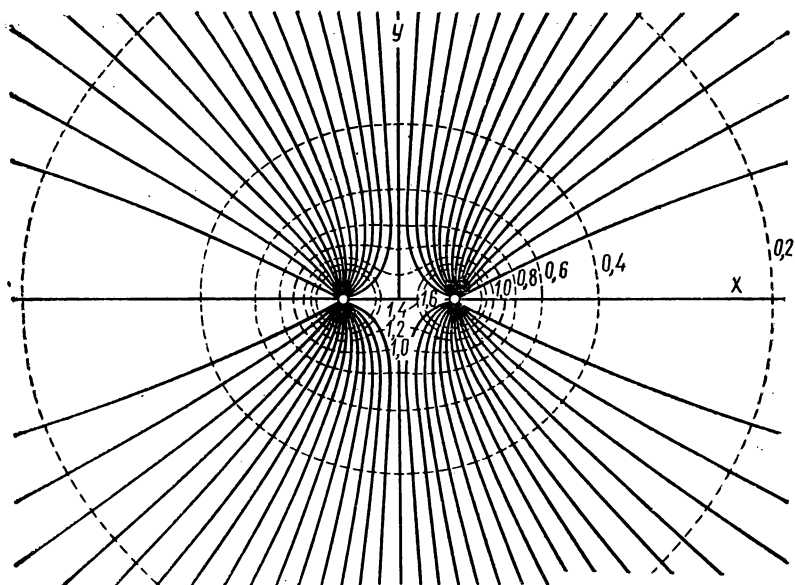


Рис. 11.7

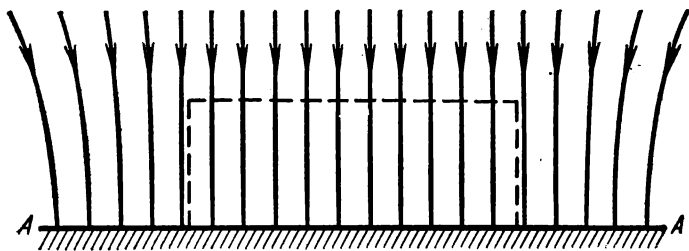


Рис. 11.8

На рисунке 11.7 изображены линии поля (сплошные кривые), созданного двумя точечными источниками равной массы. Очень важно уяснить, что картина поля всегда определяет силу, испытываемую третьим (пробным) телом, помещенным в данное поле, но никак не отражает взаимодействия источников (в случае, показанном на рисунке 11.7, они, конечно, притягиваются друг к другу).

Линии поля, образованного плоской поверхностью, пересекающей с плоскостью чертежа по линии AA , изображены на рисунке 11.8. На расстояниях, достаточно малых по сравнению с длиной и шириной поверхности, напряженность поля одинакова во всех точках (эта область выделена на рисунке пунктирным прямоугольником); подобное поле называется *однородным*. Такое же поле существует вблизи поверхности однородного шара большого радиуса. Именно поэтому напряженность поля земного тяготения можно счи-

татъ постоянной в пределах области, примыкающей к поверхности Земли.

Во всяком однородном поле напряженность постоянна во всех точках:

$$\vec{\Gamma} = \text{const.}$$

11.5. ПОТЕНЦИАЛ. РАБОТА СИЛ ПОЛЯ

Кроме векторной характеристики поля — его напряженности, определяющей силовое действие поля, вводится скалярная характеристика поля, связанная с работой сил поля. Эта характеристика называется *потенциалом* данной точки поля.

Рассмотрим работу сил тяготения в поле точечной массы M (рис. 11.9). Пусть пробное тело массой m перемещается по произвольному пути между точками 1 и 2. Работа сил тяготения равна:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = -GM \int_1^2 \frac{m}{R^2} dl \cos(\hat{d\vec{l}}, \hat{\vec{\Gamma}}),$$

но

$$dl \cos(\hat{d\vec{l}}, \hat{\vec{\Gamma}}) = dR,$$

поэтому

$$A = -GMm \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -GMm \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (11.10)$$

Функции φ_1 и φ_2 в поле материальной точки массой M зависят только от R_1 и R_2 :

$$\varphi_i = -G \frac{M}{R_i} + \text{const.}$$

Работа A оказалась независимой от формы пути; она полностью определяется положением начальной и конечной точек.

Следует иметь в виду, что так бывает далеко не всегда; например, работа сил трения зависит от формы пути, так как сила трения в любой точке противодействует движению и зависит от скорости, а не от координат.

Функцию

$$\varphi = -\frac{GM}{R} + \text{const} \quad (11.11)$$

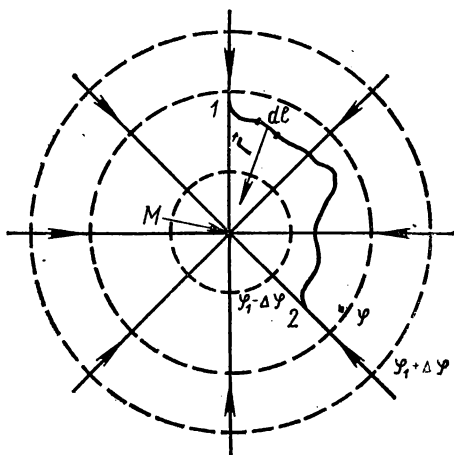


Рис. 11.9

называют *потенциальной функцией* (или просто *потенциалом*) точек поля, созданного точечной массой M . Потенциал, как и напряженность, является «функцией точки», т. е. зависит лишь от координат (но не от времени или других переменных).

Из уравнения (11.10) следует, что работа сил поля не зависит от выбора постоянной в выражении (11.11). Эта постоянная не играет роли ни в каких физических приложениях потенциала; поэтому ее можно выбрать произвольно — всегда важна лишь разность потенциалов. В рассматриваемом случае разумно выбрать ее равной нулю на бесконечности ($R \rightarrow \infty$). Тогда выражение для потенциала точек поля упростится и примет вид:

$$\varphi = -\frac{GM}{R}. \quad (11.12)$$

При этом потенциалы всех точек поля точечной массы M отрицательны. Далее, из уравнения (11.10) следует, что работа сил тяготения по любой замкнутой траектории равна нулю:

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = m \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (11.13)$$

Интеграл, стоящий в уравнении (11.13), представляет собой циркуляцию вектора \vec{F} (см. § 10.6). Итак, циркуляция вектора напряженности поля тяготения равна нулю (независимо от формы выбранной замкнутой траектории).

В силу принципа суперпозиции уравнение (11.13) справедливо для поля тяготения любой конфигурации.

В поле можно построить поверхности, содержащие точки с одинаковым потенциалом (эквипотенциальные поверхности). В поле точечной массы эти поверхности являются шаровыми поверхностями; центр поверхностей совпадает с точечной массой (см. рис. 11.9, где пересечения поверхностей равного потенциала с плоскостью чертежа показаны пунктиром). В полости, охваченной шаровым слоем, напряженность поля равна нулю, а потенциал постоянен (по всему объему полости). В самом шаровом слое, а также внутри сплошного шара поверхности равного потенциала также шаровые. На рисунке 11.10 показано сечение однородного шара плоскостью, проходящей через его центр. Следы эквипотенциальных поверхностей на этой плоскости представляют собой окружности. Потенциал на поверхности шара принят равным -1 Дж/кг.

Пунктирные кривые на рисунке 11.7 также представляют сечения плоскостью чертежа эквипотенциальных поверхностей; модули потенциалов соответствуют числам, стоящим у кривых.

В однородном поле поверхности равного потенциала — это плоскости, перпендикулярные линиям напряженности (рис. 11.11). Заметим, что здесь нельзя говорить о потенциале бесконечно удаленных точек (ведь область однородного поля всегда ограничена!). Поэтому в этом случае за нулевой потенциал обычно принимают

потенциал на поверхности тела, создающего поле. Тогда потенциалы всех точек поля вне тела положительны.

Эта условность в выборе нулевого значения потенциала и связанная с ней условность знаков, приписываемых потенциалу, не должна смущать: во всех расчетах важно лишь изменение потенциала (разность потенциалов), а не его абсолютные значения; изменения же, конечно, не зависят от выбора нулевых значений.

В полях, простирающихся до бесконечности, потенциал, согласно уравнению (11.10), можно определить как работу, которую должны совершить силы поля при удалении единичной массы из рассматриваемой точки поля на бесконечность:

$$\varphi = \frac{A}{m} = - \frac{GM}{R_1} < 0.$$

Отрицательный знак свидетельствует о том, что при этом процессе должны работать внешние силы (противонаправленные силам поля).

Так как потенциал — скалярная функция, то в поле, созданном системой материальных тел, потенциал каждой точки определяется суммой потенциалов, созданных отдельными телами.

Если материальная точка массой m вносится в поле, созданное другими телами, то в точке с потенциалом φ ее потенциальная энергия должна равняться:

$$W_p = m\varphi. \quad (11.14)$$

Она отрицательна, так как на бесконечности энергия точечной массы m равнялась нулю, а силы поля совершали работу при перемещении данной материальной точки. Конечно, при этом точка приобрела кинетическую энергию.

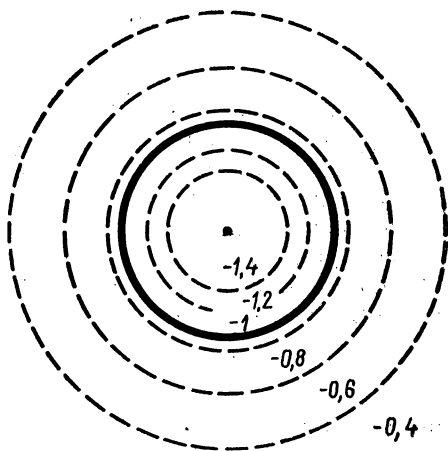


Рис. 11.10

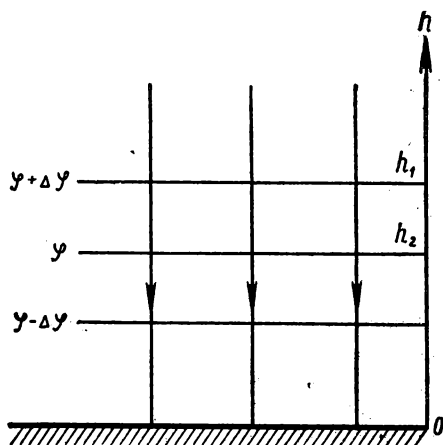


Рис. 11.11

В однородном поле тяготения (см. рис. 11.11) значения потенциала тем больше, чем дальше расположена точка поля от поверхности нулевого потенциала, причем потенциал пропорционален этому расстоянию, так что работа перемещения точки массой m с расстояния h_1 до расстояния h_2 равна:

$$A = m(\varphi_1 - \varphi_2) = m\Delta\varphi = m\Gamma(h_1 - h_2) = \Delta W_p. \quad (11.15)$$

Так как вектор силы, действующей на тело, помещенное в поле тяготения, направлен по касательной к линии напряженности, а работа сил тяготения при перемещении по эквипотенциальной поверхности равна нулю, то пересечения линий напряженности и поверхностей равного потенциала происходят всегда под прямым углом — мы видели это на всех рассмотренных выше рисунках (см. рис. 11.7, 11.9, 11.11).

Если условиться строить поверхности равного потенциала, отличающиеся друг от друга на одну и ту же величину $\Delta\varphi$, то семейство эквипотенциальных поверхностей будет наглядно характеризовать свойства поля: чем ближе друг к другу поверхности, тем больше модуль напряженности поля. При этом вектор напряженности направлен по нормали в сторону убывания потенциала.

Из уравнения (11.10) следует, что потенциал и напряженность связаны между собой. Действительно, для поля точечной массы M

$$\varphi = -G \frac{M}{R}; \quad \vec{\Gamma} = -\frac{d\varphi}{dR} \frac{\vec{R}}{R}. \quad (11.16)$$

В этом случае в направлении радиуса происходит самое быстрое изменение потенциала с расстоянием; в то же время радиус является нормалью к поверхности равного потенциала.

В векторном анализе вводится векторная функция *градиент потенциала*:

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}_0, \quad (11.17)$$

где \vec{n}_0 — единичный вектор, направленный в сторону быстрого увеличения потенциала.

В прямоугольной системе координат вектор $\text{grad } \varphi$ записывают так:

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (11.18)$$

В соответствии с формулой (11.17) уравнение (11.16) можно представить в виде:

$$\vec{\Gamma} = -\text{grad } \varphi.$$

Это выражение является общим для любых гравитационных полей.

В § 7.2 мы нашли, что работа сил упругости так же, как и сил тяготения, определяется лишь начальной и конечной точкой пути;

позже мы узнаем, что таким же свойством обладают кулоновские силы взаимодействия между неподвижными электрическими зарядами. Поля, характеризующиеся потенциалом, называются *потенциальными* или *безвихревыми* полями в отличие от вихревых полей, где линии напряженности являются замкнутыми на себя кривыми, а понятие потенциала теряет однозначность. Работа сил поля по замкнутой траектории в вихревом поле может отличаться от нуля (примером вихревого поля служит магнитное поле электрического тока).

Сведения, полученные при рассмотрении гравитационного поля, позволяют глубже понять сформулированный во второй главе закон сохранения и превращения механической энергии (2.28).

Рассматривая движение тела в гравитационном поле, мы убедились в том, что его энергия не меняется. Сохранение механической энергии при движении тела в гравитационном поле обусловлено особым свойством этого поля — независимостью работы сил поля от формы и длины пути (или, что то же, равенством нулю циркуляции вектора напряженности по любому контуру). При этом предполагается отсутствие сил трения и потерь энергии на их преодоление. Поэтому теперь можно уточнить закон сохранения механической энергии (2.28), дав следующую формулировку его: **Если в системе действуют только консервативные силы, то энергия системы является чисто механической и сохраняется во времени:**

$$W = W_k + W_p = \text{const.}$$

Многие реальные механические движения сопровождаются трением. Силы трения нельзя считать консервативными, так как их работа зависит от формы и длины пути, а также от скорости движения. Следовательно, в системе с трением механическая энергия не остается постоянной. Она при движении уменьшается, часть механической энергии благодаря трению переходит во внутреннюю энергию движущихся тел (они нагреваются). В этом случае закон сохранения энергии формулируется в более общей форме (2.32).

В § 2.10 закон сохранения энергии применялся к замкнутым системам, содержащим все взаимодействующие тела. Для таких систем в любой инерциальной системе отсчета центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Если, введя понятие поля, приписать потенциальную энергию рассматриваемому телу, то закон сохранения энергии будет справедлив и для системы, состоящей из данного тела и той части поля, где это тело перемещается. Это означает, что мы считаем поле заданным и неизменным (т. е. создающие его тела неподвижными). Такое допущение не всегда возможно. Конечно, при изучении движения камня в поле тяжести Земли можно Землю считать неподвижной. Но при строгом изучении движения планет вокруг Солнца нужно учитывать движение обоих небесных тел вокруг их общего центра масс.

Строгий анализ вопроса о том, где и как распределена потенциальная энергия в некотором потенциальном поле, выходит за рамки элементарной теории тяготения. Заметим лишь, что потенциальной энергией обладает не только тело, находящееся в поле тяготения, созданном другими телами, но и тело в своем собственном поле тяготения.

Действительно, возникновение этого поля можно представить себе так: находившееся в бесконечности тело массой M было разбито на элементарные части массой dm , поочередно доставлявшиеся в ту область пространства, где находится теперь это тело. Принимая для простоты, что тело можно рассматривать как материальную точку, мы можем приписать точке, куда переносятся элементарные массы, потенциал φ , меняющийся по мере накопления массы m пропорционально этой массе:

$$\varphi = m\psi,$$

где функция ψ зависит от координат, но не от массы. Соответственно меняется и элементарная работа сил тяготения при переносе из бесконечности массы dm :

$$dA = \varphi dm = \psi m dm.$$

Полная потенциальная энергия тела массой M оказывается равной (в своем собственном поле тяготения):

$$W_p = \int_0^M \psi m dm = \frac{1}{2} M^2 \psi = \frac{1}{2} M \varphi_0,$$

где φ_0 — конечное значение потенциала в точке, где находится тело.

Все точки поля тяготения, возникшего в окружающем пространстве, характеризуются значениями своего потенциала φ и напряженности Γ . Поэтому найденную потенциальную энергию можно приписать не телу, но полю, считая ее распределенной в поле по всему его объему с некоторой объемной плотностью энергии:

$$w = Cf(R),$$

где C — постоянная, не зависящая от радиус-вектора рассматриваемой точки.

В простейшем частном случае весьма тонкого шарового слоя радиусом R_0 и массой M эта объемная плотность постоянна в пределах каждого шарового слоя радиусом $R > R_0$ и толщиной dR ; в слоях радиусом $R < R_0$ она обращается в нуль, так как там поле отсутствует.

Полная энергия такого поля равна:

$$W = \int_{R_0}^{\infty} Cf(R) 4\pi R^2 dR.$$

Но мы уже знаем, что эта энергия выражается через характеристики слоя следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} M \varphi_0 = \frac{1}{2} G \frac{M^2}{R_0}.$$

Подобная зависимость от R может получиться только при условии, что

$$f(R) = R^{-4}.$$

Выполняя интегрирование и приравнявая оба выражения для полной энергии, находим соотношение для определения постоянной C :

$$C = \frac{1}{8\pi} GM^2.$$

Окончательно для плотности энергии имеем:

$$w = + \frac{1}{8\pi} \frac{GM^2}{R_0^4} = \frac{1}{8\pi G} \Gamma^2, \text{ где } \Gamma = \frac{GM}{R_0^2}.$$

Можно показать, что выражение

$$w = \frac{1}{8\pi G} \Gamma^2$$

справедливо для поля любой конфигурации (хотя Γ будет выражаться иной зависимостью от массы и расстояния).

При изучении электромагнитного поля, меняющегося со временем, вопрос о распределении энергии в поле будет обсужден более глубоко и строго.

11.6. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ. СПУТНИКИ

Рассмотрим перемещение точки массой m , движущейся в поле тяготения, связанном с другой точкой массой $M \gg m$. Выберем систему отсчета с началом координат в точке M . Если скорость точки m равна \vec{v} , то полный запас энергии системы двух точек (будем считать ее замкнутой) равен:

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + m\varphi = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{R}.$$

Для этого простого случая зависимость потенциальной энергии от расстояния между точками изобразится гиперболой (рис. 11.12). Прибавив к потенциальной энергии кинетическую, получим полную энергию.

Если полная энергия отрицательна, то возможные движения точки m ограничены областью $0, R_1$. При $W=0$ движение становится неограниченным, и при надлежащем выборе направления начальной скорости (она не должна быть направлена к началу координат) точка m может бесконечно удалиться (при этом скорость обратится в нуль). При $W>0$ скорость везде остается конечной. Характер этих движений существенно зависит от направления начальной скорости.

В качестве примера исследуем возможные траектории космических кораблей, запускаемых с поверхности Земли (трением, возникающим при прохождении кораблем земной атмосферы, пренебрежем, как и возмущениями движения, создаваемыми другими планетами и Луной). Систему координат свяжем с центром Солнца. Орбиту Земли будем считать круговой. Тогда и кинетическая, и потенциальная энергии Земли относительно Солнца не изменяются при обращении Земли, и их можно не учитывать.

Полная энергия корабля при запуске складывается из

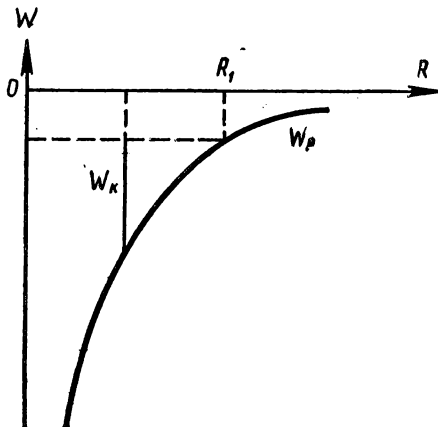


Рис. 11.12

его кинетической энергии $\frac{1}{2}mv^2$ и его потенциальной энергии относительно Земли $-G \frac{mM_3}{R_3}$ и относительно Солнца $-Gm \frac{M_C}{R_C}$:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - Gm \frac{M_3}{R_3} - Gm \frac{M_C}{R_C} = \frac{1}{2}mv^2 - Gm \frac{M_3}{R_3} \left(1 + \frac{M_C R_3}{M_3 R_C}\right),$$

где расстояние до Солнца $R_C = 150 \cdot 10^6$ км, расстояние до центра Земли $R_3 = 6,4 \cdot 10^3$ км, масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, масса Земли $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг.

Но

$$Gm \frac{M_3}{R_3} = mgR_3,$$

где $g = 9,8 \cdot 10^{-3}$ км/с² — ускорение в поле тяжести у земной поверхности. Поэтому для полной энергии (после подстановки числовых значений) получим:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - 15mgR_3.$$

Рассмотрим наиболее интересные частные случаи.

1. Если $W > 0$, то тело может уйти за пределы Солнечной системы (если не столкнется с Солнцем!). Для этого нужно выполнить условие:

$$v > v_3 = \sqrt{gR_3} \sqrt{30} = 43 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Скорость v_3 называют *третьей космической скоростью*. Так как результат не связан с формой пути, а направление начальной скорости произвольно, то можно начальную скорость, сообщаемую космическому кораблю, сделать параллельной скорости движения Земли вокруг Солнца (29,5 км/с). Тогда необходимая дополнительная скорость относительно Земли составит всего лишь 13,5 км/с.

2. Если $W < 0$ и при этом окажется, что скорость корабля относительно Земли и энергия его взаимодействия с Землей таковы, что

$$W_1 = \frac{1}{2}mv^2 - mgR_3 > 0,$$

то это значит, что корабль уйдет из области земного притяжения и будет обращаться вокруг Солнца. Необходимая для этого скорость (относительно Земли!) не должна быть меньше *второй космической скорости*:

$$v_2 = \sqrt{2gR_3} = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

3. При достаточно малой начальной скорости v_1 корабль не сможет уйти из области действия земного притяжения. В этом случае его потенциальная энергия относительно Солнца меняется очень мало; эти изменения можно не учитывать и связать систему координат

нат с Землей. Весьма интересен частный случай, когда начальная скорость корабля перпендикулярна радиус-вектору, соединяющему с ним центр Земли, а модуль скорости таков, что сила тяготения к Земле как раз обеспечивает центростремительное ускорение. Тогда корабль движется вокруг Земли по окружности. Из условия:

$$\frac{mv_1^2}{R_3} = mg$$

получаем необходимую скорость:

$$v_1 = \sqrt{gR_3} = 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}};$$

это так называемая *первая космическая скорость*.

На рисунке 11.13 изображены возможные траектории корабля, движущегося относительно точечной массы M . Корабль запускается на расстоянии $R_3 + h$ от точки M , причем начальная скорость \vec{v} нормальна к радиус-вектору. Для всех эллиптических траекторий $W < 0$, для параболической траектории $W = 0$, для гиперболических траекторий $W > 0$.

Так как Земля не точка, а шар, то все траектории, для которых большая полуось эллипса меньше $R_3 + h$, пересекутся с поверхностью Земли. Описанная телом траектория будет частью эллипса. Но при очень малых дугах (им отвечает малая начальная скорость) эллипс практически неотличим от параболы. Поэтому-то, изучая в главе I движение тела в постоянном поле тяготения, мы получили параболическую траекторию.

Рассмотрим еще случай, когда спутник, движущийся в плоскости земного экватора, висит над некоторой точкой земной поверхности. Такой спутник может быть использован, например, для связи между удаленными друг от друга точками на земной поверхности.

Угловая скорость обращения такого спутника вокруг земной оси должна совпадать с угловой скоростью собственного вращения Земли вокруг своей оси. Если высота его над земной поверхностью h , то должно выполняться равенство:

$$G \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} (R+h),$$

где R — экваториальный радиус Земли, T — период ее обращения вокруг оси.

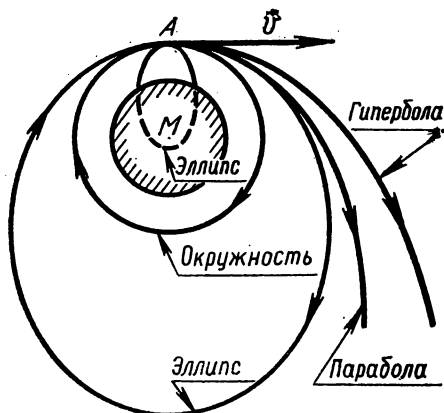


Рис. 11.13

Решение уравнения относительно $R+h$ дает:

$$R+h=42\,000 \text{ км},$$

откуда

$$h=35\,600 \text{ км}.$$

Спутник, движущийся по круговой орбите радиусом R_1 , находясь только под действием силы притяжения к Земле, обладает вполне определенной линейной скоростью v , определяемой из условия:

$$G \frac{M}{R_1^2} m = \frac{mv^2}{R_1};$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}.$$

Так как при этом его потенциальная энергия относительно Земли составляет:

$$W_p = -G \frac{Mm}{R_1},$$

а кинетическая:

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{R_1},$$

то полная энергия спутника (влиянием Солнца можно пренебречь) оказывается равной:

$$W = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{R_1} = -\frac{1}{2} mv^2. \quad (11.19)$$

Однако если нужно перевести спутник с орбиты радиусом R_1 на орбиту меньшего радиуса R_2 , то нельзя просто увеличить его скорость (двигателями, имеющимися на спутнике). Действительно, при увеличении скорости сила тяготения не сможет обеспечить необходимого центростремительного ускорения и спутник начнет удаляться от Земли. Если же при помощи двигателей уменьшить линейную скорость спутника до значения v_1 , то разность сил:

$$G \frac{Mm}{R_1^2} - \frac{mv_1^2}{R_1} = ma$$

сообщит спутнику дополнительное ускорение \vec{a} , направленное к Земле, радиус орбиты начнет уменьшаться, кинетическая энергия снова будет возрастать. Управляя направлением полной скорости спутника, можно сделать ее нормальной к радиусу в тот момент, когда она будет равняться скорости, при которой возможно обращение по орбите только за счет сил тяготения; после этого будет происходить устойчивое движение по орбите уменьшенного радиуса. Согласно выражению (11.19), полная энергия при этом станет меньше, чем до начала манёвра. Соответствующая часть энергии будет унесена уходящими газами.

11.7. ВЕС ТЕЛА

Уточним теперь широко распространенное понятие *вес тела*. Весом \vec{P} называют силу, с которой тело массой m действует на неподвижную относительно него опору (или неподвижный относительно него подвес), причем причиной этого действия является притяжение этого тела Землей, описываемое законом тяготения Ньютона:

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^3} \vec{R} = m\vec{g}.$$

Сила \vec{P} может быть непосредственно измерена, например, на пружинных весах. Вес \vec{P} не всегда совпадает с \vec{F} . Так, если опора вместе с покоящимся на ней телом движется с некоторым ускорением \vec{a} , совпадающим по направлению с вектором \vec{g} , то, применяя к телу второй закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$ (\vec{N} — сила реакции опоры), получим:

$$\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g}).$$

Так как сила реакции опоры и вес численно равны, но направлены в противоположные стороны ($\vec{P} = -\vec{N}$), то

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

Таким образом, при $a=0$ $\vec{P} = m\vec{g}$.

При движении опоры с ускорением $a \neq 0$ $P \neq mg$ и в зависимости от значения и направления \vec{a} может быть как больше, так и меньше mg .

В частном случае при $\vec{a} = \vec{g}$ давление на опору исчезает, это состояние принято называть *невесомостью*. Невесомость возникает и в том случае, когда опора, подверженная действию каких-то дополнительных (кроме тяготения) сил, приобретает ускорение \vec{a} , совпадающее с \vec{g} по направлению, и $|\vec{a}| > |\vec{g}|$. В этих условиях тело отстает от опоры и, отделившись от нее, будет падать с ускорением свободного падения \vec{g} . Так как опоры под телом нет, то, в сущности, вопрос о весе отпадает.

Вообразим тело, лежащее на полу некоторого ящика (лифта). Пока лифт не движется (относительно Земли), вес тела равен mg . Если лифт начнет двигаться вниз с ускорением $|\vec{a}| < |\vec{g}|$, то, как уже было выяснено, вес тела уменьшится до значения:

$$P_1 = m(g - a),$$

причем $P_1 > 0$.

Если же модуль ускорения $|\vec{a}|$ станет больше $|g|$, то тело, оторвавшись от пола, достигнет потолка и будет давить на него с силой:

$$P_2 = m(g - a).$$

Здесь $P_2 < 0$. Часто говорят, что при этом «вес изменил направление». Конечно, это не точно, так как ускорение \vec{a} создано не силой тяготения, действующей на тело. Сила тяготения сообщает лишь ускорение \vec{g} , благодаря чему взаимодействие тела с потолком уменьшается.

Равномерное прямолинейное движение тела и опоры, конечно, никак не сказывается на весе, так как оно вообще не изменяет силовых взаимодействий.

Изменение веса происходит и при ускоренном движении тела и опоры в направлении, не совпадающем с направлением силы тяготения \vec{F} .

Так, в § 5.2 было выяснено, что тело, лежащее на поверхности Земли, участвует во вращении вокруг земной оси благодаря тому, что за счет силы тяготения \vec{F} возникает центростремительное ускорение:

$$\vec{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \vec{\rho}$$

(ω — угловая скорость вращения Земли, ρ — радиус круга широты, проходящего через точку, где лежит тело), и вес тела оказывается равным:

$$\vec{P} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{цс}}.$$

На полюсе изменения веса не происходит: $P = F$.

При движении космических кораблей и спутников по околоземным орбитам (если двигатели корабля выключены) все части корабля и находящиеся в нем предметы также находятся в состоянии невесомости (их ускорение создается силой тяготения к Земле) — взаимодействие тел с опорами исчезает, так как все тела «свободно падают» на Землю.

11.8. ИНЕРТНАЯ И ГРАВИТАЦИОННАЯ МАССЫ. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В заключение этой главы несколько уточним понятие массы. Во втором законе Ньютона масса выступала, как мера инерции тела; будем называть ее «инертной массой» m_i . В законе тяготения сила определяется массами взаимодействующих тел, которые, вообще говоря, могут и не совпадать с инертными массами; назовем их «тяготеющими» (гравитационными) или «тяжелыми» массами m_t . Вопрос о соотношении между ними может быть решен только опытным путем.

Первые опыты подобного рода (не владея еще понятием массы) производил Галилей, бросая тела с высокой башни и измеряя время их падения. Он вывел из этих опытов заключение о постоянстве ускорения свободного падения для всех тел (в данном месте земной поверхности).

С современной точки зрения опыты Галилея следует трактовать так. Сила тяготения между телом массой m и Землей, по Ньютону, пропорциональна произведению тяжелых масс:

$$F_t \sim m_t M_t.$$

Сила F_t , действуя на свободно падающее тело с инертной массой m_n , сообщает ему (по второму закону Ньютона) ускорение:

$$g = \frac{F_t}{m_n} \sim \frac{m_t}{m_n}.$$

Так как из опыта получены одинаковые ускорения для всех исследованных тел, то необходимо признать, что отношение инертной и тяжелой массы для всех тел постоянно.

Надлежащим выбором единиц можно эти массы сделать для каждого тела равными друг другу:

$$\frac{m_t}{m_n} = 1. \quad (11.20)$$

Конечно, опыты Галилея были весьма неточны. Ньютон проверял полученное заключение (11.20), изучая колебания маятников одинаковой конфигурации, но различной массы; и здесь сила, ускоряющая маятник, зависит от тяжелой массы, а приобретаемое под действием этой силы ускорение — от инертной массы. Ньютон подтвердил результат Галилея с точностью до 10^{-3} .

Позже точность опытов была существенно повышена. Так Этвеш (1899 г.) подтвердил равенство масс с точностью до 10^{-8} , Дикке с сотрудниками (1964 г.) — до $\sim 3 \cdot 10^{-11}$, и, наконец, Брагинский и Панов (1971 г.) — до $\sim 10^{-12}$. Несмотря на такую фантастическую точность, дальнейшие исследования в этом направлении продолжаются.

Интерес к этой проблеме объясняется тем, что равенство тяжелой m_t и инертной m_n масс положено в качестве постулата в основу теории тяготения Эйнштейна — его общей теории относительности, созданной в двадцатых годах нашего века. Проверка этой теории и следствий из нее — один из серьезнейших вопросов современной физики. Ограниченность классических представлений о тяготении очевидна. Строго говоря, они применимы лишь к неподвижным телам.

Действительно, если расстояние между взаимодействующими телами меняется, то должно меняться и взаимодействие. Но, согласно теории относительности, скорость передачи взаимодействия конечна: она не может превышать скорости света в вакууме, — это значит, что если в данном месте источник поля переместится сейчас, то в удаленной точке поле изменится несколько позже. Этого запаз-

дывания теория Ньютона не учитывает. Так как она все же приводит к правильным результатам, то следует заключить, что скорости перемещения тел очень малы по сравнению со скоростью передачи тяготения. Эта скорость еще не измерена, но есть основания думать, что она равна скорости света в вакууме. При периодическом движении некоторого массивного тела вокруг него должны создаваться периодические изменения поля тяготения — гравитационные волны. Их сейчас пытаются обнаружить, но достоверных результатов пока не получено.

Отказ от рассмотрения поля тяготения как стационарного характерен для теории Эйнштейна. Есть в ней и еще важная особенность. Классические представления, кроме допущения бесконечной скорости распространения взаимодействия, основаны на том, что гравитационное поле, возбуждаемое любым телом, само совершенно не зависит от наличия других тел. Это приводит к линейности уравнений, связывающих силы взаимодействия с массами тел и, как следствие, к применимости принципа суперпозиции, позволяющего складывать как векторы силы (напряженности) для гравитационных полей, создаваемых разными источниками. В новой теории тяготения заложен нелинейный характер гравитационных взаимодействий, т. е. учитывается, что значительные массы на достаточно малых расстояниях влияют друг на друга при создании гравитационного поля. Отказ от принципа суперпозиции делает теорию очень сложной. Естественно, что в предельном случае малых скоростей взаимодействующих тел и не слишком больших гравитационных полей теория Эйнштейна переходит в ньютоновскую.

В рамках общего курса физики обсуждение общей теории относительности и следствий из нее невозможно. В настоящее время накоплено довольно много экспериментальных данных, подтверждающих новую теорию. Так, например, теория относительности показывает, что в очень сильных полях тяготения пространство теряет свою однородность, что должно, в частности, сказаться на условиях распространения света. Для заметных изменений нужно, чтобы потенциал поля тяготения был порядка:

$$\varphi_0 = c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Но даже у поверхности Солнца ($R = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$; $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$)

$$\varphi \approx 2 \cdot 10^{-6} \varphi_0,$$

т. е. потенциал относительно мал. Тем не менее наблюдения звезд во время солнечного затмения и радиолокация Меркурия (когда он кажется лежащим у края солнечного диска) подтвердили теоретические предсказания (искривление траектории лучей и изменение скорости распространения света) с достаточной точностью.

Дальнейшее развитие идей общей теории относительности, выходящее далеко за пределы этой книги, приводит к определенным представлениям о строении вселенной и ее развитии.

Нужно отметить, однако, что громадные математические трудности, возникающие при рассмотрении столь обширной задачи, не позволяют получить однозначного решения поставленного вопроса и результаты, полученные различными группами исследователей, существенно отличаются друг от друга.

Наблюдательный материал, накопленный современной астрономией и астрофизикой, также недостаточен для решения этого вопроса.

Тем не менее общая теория относительности, несомненно, способствует повышению интереса к космологическим теориям и наводит на ряд плодотворных идей при планировании космологических исследований.

Таблица механических величин

Величина		Единица	
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение
Длина	l, L, s, r, R, h	метр	м
Время	t, T, τ	секунда	с
Масса	m, M	килограмм	кг
Площадь	S	метр квадратный	м ²
Объем	V	метр кубический	м ³
Плотность	ρ	килограмм на кубический метр	кг/м ³
Частота	f, n	герц	Гц
Скорость	v, u, V, c	метр в секунду	м/с
Ускорение	a, g	метр на секунду в квадрате	м/с ²
Угловая скорость	ω	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	α	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²
Импульс	p	килограмм-метр в секунду	кг·м/с
Сила	f, F	ньютон	Н
Давление	p	паскаль	Па
Работа, энергия	A, W	джоуль	Дж
Мощность	N	ватт	Вт
Момент инерции	I	килограмм-метр в квадрате	кг·м ²
Момент силы	M	ньютон-метр	Н·м
Момент импульса	L	килограмм-метр в квадрате на секунду	кг·м ² /с
Плоский угол	$\alpha, \beta, \gamma, \varphi$	радиан	рад
Телесный угол	Ω, ω	стерадиан	ср

ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аристотель 37

Бернулли Д. 199

Виния 26

Браге Т. 214

Вектор конечного перемещения 9

— Умова 142

Вес 233

Волна 163

— линейно-поляризованная 164

— плоская 169

— поперечная 163

— продольная 163

— стоячая 176

Волновое сопротивление 152

— число 167

Время релаксации 72

Галилей Г. 12

Гироскоп 92

Гук Р. 38

Гюйгенс Х. 179

Декремент затухания 150

— — логарифмический 150

Деформация относительная 136

— упругая 38, 136

Дифракция 179

Длина волны 165

Добротность 151

Жесткость 38, 70

Жуковский Н. Е. 209

Закон Архимеда 194

— всемирного тяготения 42, 214

— Гука 38, 137

— Ньютона второй 39, 40

— — первый 37

— — третий 41

— Паскаля 192

— сохранения механического импульса 50

— — механической энергии 55, 227

— — момента механического импульса 88

— Стокса 73

Импульс механический 40

Инерция 38

Интенсивность 171

Интерференция 174

Кеплер И. 7, 214

Колебания вынужденные 153

— гармонические 23

— затухающие 146

— параметрические 162

— релаксационные (пиллоб-разные) 160

— свободные 143

— собственные 146

Коперник Н. 7, 214

Коэффициент отражения 177

— поглощения 172

— Пуассона 138

— сопротивления 72

— трения 143

— — скольжения 75

Линия тока 197

Лобовое сопротивление 206

Ломоносов М. В. 39

Луч 164

Масса 39

— гравитационная («тяже-лая») 234

— инертная 39, 234

Материальная точка 39

Метод векторных диаграмм 30, 155

— комплексных амплитуд 31, 158

Модуль объемного сжатия 139

— Юнга 137

Момент инерции 84

— механического импульса 87

— силы 86

Мощность 52

Напряжение 137

Напряженность 42, 218

Невесомость 233

Ньютон И. 7

Пара сил 98

Паскаль Б. 192

Поле однородное 222

— потенциальное 227

Потенциал 223

—, градиент 226

Поток вектора напряженно-сти 219

Предел прочности 136, 138

— упругости 136, 138

Преобразования Галилея 19

— Лоренца 126

Прецессия 93

Принцип Гюйгенса 179

— относительности Галилея 47, 120

— — Эйнштейна 121

— суперпозиции 41

Птолемей К. 7, 213

Работа 52

Ракета 66

Рычаг 96

Сила 38

— жидкого трения 71

— инерции 108

— — центробежная 112

— Кориолиса 112

— подъемная 206

— тяжести 38

— упругая 70

Система автоколебательная 161

— замкнутая 48

— консервативная 54

— отсчета инерциальная 37

— — неинерциальная 107

Скорость вторая космиче-ская 230

— мгновенная 11

— первая космическая 231

— средняя 11

— третья космическая 230

— угловая 16

Соударение 61

— неупругое 61

— упругое 63

Стевин С. 192

Теорема Остроградского —

Гаусса 220

— Штейнера 85

Траектория 8

Трение покоя 74

— скольжения 74

Трубка тока 197

Уравнение Бернулли 199

— Мещерского 67

— непрерывности струи 198

— Пуазейля 203

— Циолковского 68

Уровень громкости 186

— звуковой мощности 186

Ускорение 12, 42

— касательное (тангенци-альное) 13

— Кориолиса 114

— мгновенное 12

— нормальное (центростре-мительное) 13, 46

— угловое 17

Формула барометрическая 195

— размерности 59,

Фурье Ж. 28

Центр масс (центр инерции) 49

Циркуляция вектора напря-женности 224

— скорости 210

Частота 17

Число Рейнольдса 204

Эйлер Л. 206

Эйнштейн А. 119

Энергия 129

— кинетическая 53

— покоя 129

— полная 129

— потенциальная 54

— связи 131

Эффект Доплера 188

— Магнуса 210

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Глава 1. Кинематика	6
1.1. Система отсчета. Перемещение тела	—
1.2. Скорость	11
1.3. Ускорение	12
1.4. Скорость и ускорение при криволинейном движении	15
1.5. Преобразования Галилея	18
1.6. Решение задач в кинематике	20
1.7. Колебательное движение; сложение колебательных движений	23
1.8. Метод комплексных амплитуд	31
1.9. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	34
Глава 2. Законы динамики Ньютона	37
2.1. Первый закон Ньютона. Сила	—
2.2. Второй закон Ньютона. Масса	39
2.3. Третий закон Ньютона	41
2.4. Природа сил	42
2.5. Решение задач в динамике	44
2.6. Принцип относительности Галилея	47
2.7. Закон сохранения импульса	48
2.8. О постулатах механики Ньютона	50
2.9. Работа силы. Энергия	52
2.10. Закон сохранения и превращения энергии	55
2.11. Примеры решения задач с использованием закона сохранения энергии	57
2.12. Размерность физических величин	59
Глава 3. Некоторые применения законов механики	61
3.1. Соударения тел	—
3.2. Движение тела с переменной массой	66
3.3. Динамика колебательного движения	69
3.4. Трение	71
3.5. Примеры из динамики вращательного движения	75
3.6. Движение электронов в электронно-лучевой трубке	78
Глава 4. Динамика твердого тела	82
4.1. Вращение твердого тела. Момент инерции	—
4.2. Момент силы. Момент импульса. Уравнение движения вращающегося тела	85
4.3. Закон сохранения момента импульса	88
4.4. Мгновенные оси вращения	90
4.5. Гироскопы	92
4.6. Маятники	94
4.7. Рычаги. Пара сил	96
4.8. Условия равновесия тела	98
4.9. Качение	102
Глава 5. Движение в неинерциальных системах отсчета	107
5.1. Поступательное ускоренное движение системы отсчета. Сила инерции	—
5.2. Равномерно вращающаяся система отсчета. Центробежная сила	110
5.3. Движение тела во вращающейся системе отсчета. Сила Кориолиса	112
5.4. Принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции	116

Глава 6. Элементы специальной теории относительности	118
6.1. Границы применимости классической механики	—
6.2. Механика Ньютона и принцип относительности Галилея	120
6.3. Принцип относительности Эйнштейна. Одновременность	121
6.4. Относительность длин отрезков и промежутков времени	123
6.5. Элементы релятивистской кинематики и динамики	126
6.6. Релятивистская связь между массой и энергией	129
6.7. Соударения при релятивистских скоростях	131
Глава 7. Упругие силы. Колебания	134
7.1. Упругие деформации. Закон Гука	—
7.2. Энергия деформации. Вектор Умова	140
7.3. Колебательные системы. Уравнения колебательного движения .	142
7.4. Свободные колебания. Затухающие колебания. Добротность колебательной системы	145
7.5. Вынужденные колебания. Резонанс	152
7.6. Рассмотрение вынужденных колебаний методом комплексных амплитуд	158
7.7. Колебания в нелинейных системах	159
Глава 8. Волны	163
8.1. Колебания в связанных системах. Образование волн	—
8.2. Бегущие волны. Скорость распространения волны	165
8.3. Энергия волны	168
8.4. Интерференция волн. Стоячие волны	172
8.5. Отражение волн	176
8.6. Принцип Гюйгенса	179
Глава 9. Элементы акустики	181
9.1. Волновая природа звука	—
9.2. Источники и приемники звука	182
9.3. Физиологическая акустика	185
9.4. Эффект Доплера	188
9.5. Ультразвуки и инфразвуки	190
Глава 10. Гидроаэродинамика	192
10.1. Равновесие жидкости и газа. Закон Паскаля. Закон Архимеда .	—
10.2. Слоистое (ламинарное) и турбулентное течение. Уравнение непрерывности струи	197
10.3. Уравнение Бернулли. Импульс струи	199
10.4. Трение в движущейся жидкости. Уравнение Пуазейля	202
10.5. Число Рейнольдса	204
10.6. Движение тел в жидкости и газе. Циркуляция скорости . . .	205
Глава 11. Всемирное тяготение	212
11.1. Взаимодействие тел. Вещество и поле	—
11.2. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения	213
11.3. Примеры применения закона всемирного тяготения. Постоянная тяготения	216
11.4. Поле тяготения. Напряженность. Теорема Остроградского — Гаусса	218
11.5. Потенциал. Работа сил поля	223
11.6. Космические скорости. Спутники	229
11.7. Вес тела	233
11.8. Инертная и гравитационная массы. Границы применимости классической теории тяготения	234
Таблица механических величин	237
Предметно-именной указатель	238

